1. 두 집합 $X = \{-2,\ -1,\ 0\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수가 아닌 것은 무엇인가?

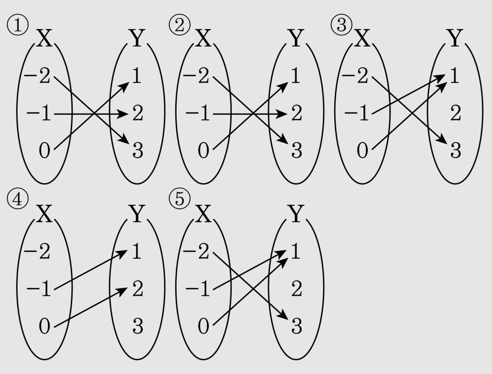
① $f(x) = 1 - x$　　② $f(x) = |x| + 1$

③ $f(x) = x^2 + x + 1$　　④ $f(x) = x^3 + 2$

⑤ $f(x) = |x^2 + x| + 1$

해설

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 함수가 아닌 것은 ④ 이다.

2. 실수의 집합을 R이라 할 때, 함수 $f : R \to R$가 다음과 같이 정해져 있다. 이 때, 일대일 대응인 것은?

① $f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$ ② $f(x) = x^2$

③ $f(x) = |x|$ ④ $f(x) = 2$

⑤ $f(x) = \frac{1}{x}$

해설

치역이 실수이고 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 것은 증가만 하거나 감소만 하는 그래프이다.
①은 직선으로서 $a > 0$이면 증가하고 $a < 0$이면 감소하는 그래프이다.

3. 다음 보기 중 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$　　㉡ $g : x \rightarrow x + 2$

㉢ $h : x \rightarrow |x| + 1$　　㉣ $i : x \rightarrow x^2 - 1$

㉤ $j : x \rightarrow |x| + 3$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$
$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$
$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$
㉡ $g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$
$g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$
$g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$
㉢ $h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$
$h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$
$h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$
㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$
㉤ $j(2) = 5 \notin Y$
그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

4. $x^2 \neq 1$ 이고, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ 이라 할 때, $f(-x)$를 $f(x)$를 사용해서 나타내면 무엇인지 고르면?

① $f(x)$ ② $-f(x)$ ③ $\{f(x)\}^2$

④ $\dfrac{1}{f(x)}$ ⑤ $2f(x)$

해설

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

5. 다음 중 다항함수인 것을 고르면?

① $y = x^2 - 3x + 5$ ② $y = \dfrac{1}{x^2}$

③ $y^2 = x$ ④ $\dfrac{1}{y} = x$

⑤ $xy = 2$

해설

① $y = x^2 - 3x + 5$ 는 x에 대한 다항식이므로 다항함수이다.

② $y = \dfrac{1}{x^2}$ 은 x에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

③ $y^2 = x$ 는 $y = \pm\sqrt{x}$ 와 같이 나타내어지고 이 것은 x에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

④ $\dfrac{1}{y} = x$는 $y = \dfrac{1}{x}$ 과 같이 나타내어지고 이것은 x에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

⑤ $xy = 2$는 $y = \dfrac{2}{x}$ 과 같이 나타내어지고 이것은 x에 대한 다항식이 아니다.

6. 정수 전체의 집합에서 정의된 함수 f를 $f(x) = (x^2$을 3으로 나눈 나머지)로 정의할 때, 함수 f의 치역을 구하면?

① $\{0\}$ ② $\{1\}$ ③ $\{0, 1\}$
④ $\{1, 2\}$ ⑤ $\{0, 1, 2\}$

해설

모든 정수는 $3k, 3k+1, 3k+2$ (k 는 정수)의 세 가지 중 하나의 꼴로 나타낼 수 있다.
(ⅰ) $x = 3k$ 일 때 $x^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
$\therefore\ f(x) = 0$
(ⅱ) $x = 3k+1$ 일 때 $x^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$
$\therefore\ f(x) = 1$
(ⅲ) $x = 3k+2$ 일 때 $x^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$
$\therefore\ f(x) = 1$
따라서 임의의 정수 x에 대하여 x^2을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이므로 구하는 치역은 $\{0, 1\}$이다.

7. 함수 f가 임의의 양수 m, n에 대하여 $f(mn) = f(m) + f(n)$, $f(2) = 1$ 일 때, $f(2^{2006})$의 값은 얼마인가?

① 1003 ② 2006 ③ 4012 ④ 2^{1003} ⑤ 2^{2006}

해설

$$\begin{aligned} f(2^{2006}) &= f(2 \times 2 \times \cdots \times 2) \\ &= f(2) + f(2) + \cdots + f(2) \\ &= 2006 f(2) = 2006 \end{aligned}$$

8. 함수 $f(x)$ 가 임의의 양수 $x,\ y$ 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은 무엇인가?

① $f(1) = 0$

② $f(6) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(2x)$

④ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f(8) = 3f(2)$

해설

임의의 양수 $x,\ y$ 에 대하여
$f(xy) = f(x) + f(y)$ 가 성립해야하므로

① $x = 1,\ y = 1$ 을 대입하면
$f(1) = f(1) + f(1)$
$\therefore\ f(1) = 0$
$\therefore$ 참

② $x = 2,\ y = 3$ 을 대입하면
$f(6) = f(2) + f(3)$
$\therefore$ 참

③ $x = x,\ y = x$ 를 대입하면
$f(x^2) = f(x) + f(x) = 2f(x)$
$\therefore\ f(x^2) \neq f(2x)$
$\therefore$ 거짓

④ $x = x,\ y = \frac{1}{x}$ 를 대입하면
$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$
① 에서 $f(1) = 0$ 이므로
$\therefore\ f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$
$\therefore$ 참

⑤ $x = 4,\ y = 2$ 를 대입하면,
$f(4 \times 2) = f(4) + f(2) \cdots$ ㉠
또, $4 = 2 \times 2$ 이므로,
$f(4) = f(2) + f(2) \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 에서 $f(8) = 3f(2)$
$\therefore$ 참

9. 모든 양수 m,n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 항상 $f(mn)=f(m)+f(n)$ 만족한다.
$f(2)=a, f(3)=b$ 일 때 $f(24)$ 를 a,b 를 써서 나타내면?

① $a+2b$ ② $2a+b$ ③ $2a+3b$
④ $3a+b$ ⑤ $3a+2b$

해설

$f(24)=f(2^3\cdot 3)=f(2^3)+f(3)$
$f(2^3)=f(2^2\cdot 2)=f(2^2)+f(2)$
$\quad =\{f(2)+f(2)\}+f(2)=3f(2)$
따라서 $3f(2)+f(3)=3a+b$

10. 임의의 두 양수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$이고 $f(3) = 1$일 때, $f(27)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x = 3,\ y = 3$ 일 때
$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 1 + 1 = 2$
$x = 9,\ y = 3$ 일 때
$f(27) = f(9 \cdot 3) = f(9) + f(3) = 2 + 1 = 3$

11. 0 이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

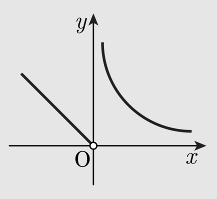
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(x>0)\\ -x(x<0)\end{cases}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

Ⅰ. $f(f(3))+f(f(-3))=\dfrac{10}{3}$ Ⅱ. $f(-x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ Ⅲ. $x_1>x_2$ 이면 $f(x_1)<f(x_2)$ 이다.

① Ⅰ ② Ⅲ ③ Ⅰ, Ⅱ ④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅲ

해설

$y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



Ⅰ. $f(f(3))+f(f(-3))=f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f(3)$

$=3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$ -<참>

Ⅱ.

ⅰ) $x>0$ 일 때, $-x<0$, $\dfrac{1}{x}>0$ 이므로

$f(-x)=-(-x)=x$,

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=x$

ⅱ) $x<0$ 일 때, $-x>0$, $\dfrac{1}{x}<0$ 이므로

$f(-x)=\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{x}$

ⅰ), ⅱ) 에서 $f(-x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ -<참>

Ⅲ. 반례) $\dfrac{1}{3}>-2$ 일 때,

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=3>2=f(-2)$ -<거짓>

따라서 옳은 것은 Ⅰ, Ⅱ 이다.

12. 다음 <보기> 중 서로 같은 함수끼리 짝지어진 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(x) = x - 2,\ g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

㉡ $f(x) = |x|,\ g(x) = \sqrt{x^2}$

㉢ 정의역이 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$ 일 때,
$f(x) = x^3,\ g(x) = 2x^2 + x - 2$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠는 $x = 2$ 에서 다른 함수이나
㉡, ㉢는 주어진 모든 정의역에서 같은 함수이다.

13. 정의역이 $\{0,\ 1\}$인 두 함수 $f(x) = x^2 + ax + b,\ g(x) = 2x + 1$에 대하여 $f = g$일 때, $a - b$ 의 값은? (단, $a,\ b$는 상수)

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

두 함수 $f,\ g$가 서로 같으므로
정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) = g(x)$이다.
즉, $f(0) = g(0),\ f(1) = g(1)$이므로
$f(0) = b,\ g(0) = 1$에서 $b = 1$
$f(1) = 1 + a + b,\ g(1) = 3$에서 $a + b = 2$
$\therefore a = 1$
$\therefore a - b = 0$

14. X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2-3x+4$, $g(x)=x^2+x+1$ 에 대하여 $f=g$ 가 성립하도록 하는 집합 X의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

두 함수가 같다는 것은 정의역의 임의의 x값에 대하여 그 함수값이 같다는 것이다.
그러므로 $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x들만을 원소로 갖는 집합이 정의역이 된다.
따라서 $2x^2-3x+4=x^2+x+1$, $x^2-4x+3=0$
$(x-3)(x-1)=0$
$\therefore x=1,\ 3$
따라서 1, 3을 원소로 갖는 집합을 구하면 된다.
즉,$\{1\}$, $\{3\}$, $\{1,\ 3\}$

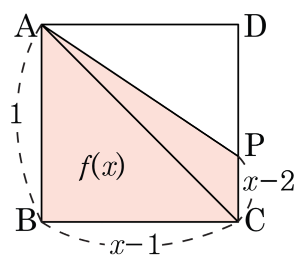
15. 실수를 원소로 갖는 집합 X가 정의역인 두 함수 $f(x)=x^2$과 $g(x)=x^3-2x$가 같을 때, X의 개수는 몇 개인가?

① 3개 ② 4개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 16개

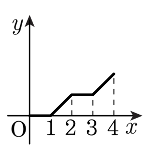
해설

두 함수의 정의역은 같으므로 $f(x)=g(x)$에서
$x^2=x^3-2x,\ x^3-x^2-2x=0$
$x(x+1)(x-2)=0,\ x=-1,\ 0,\ 2$
$\therefore\ X=\{-1,\ 0,\ 2\}$
따라서 X의 공집합을 제외한
부분집합이 되므로 7개

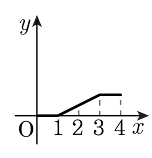
16. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



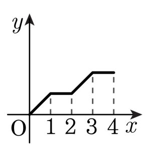
①



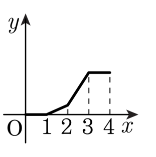
②



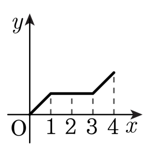
③



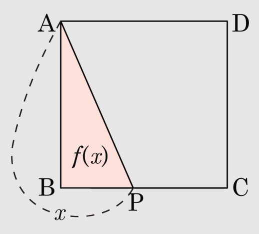
④



⑤



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$ 한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

17. 일차함수 $f(x)$는 실수 x에 대하여 다음을 만족한다. $xf(x)+f(1-x)=x^2+2$ 이 때, $f(100)$ 의 값은?

① -101　② -100　③ 0　④ 100　⑤ 101

해설

$f(x)=ax+b$ 라 놓으면
$x(ax+b)+a(1-x)+b=x^2+2$
$ax^2+(-a+b)x+(a+b)=x^2+2$
위 식은 x에 대한 항등식이므로
$a=1,\ b=1$
이때 $f(x)=x+1$ 이므로 $f(100)=101$

18. 두 집합 $X = \{0,\ 1,\ 2\}$, $Y = \{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가 $f(x) = 2x^2 - 3x$일 때, 함수 f의 치역을 구하면?

① $\{-1,\ 1\}$ ② $\{-1,\ 0,\ 1\}$ ③ $\{0,\ 1,\ 2\}$
④ $\{-1,\ 0,\ 2\}$ ⑤ $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

해설

$f(x) = 2x^2 - 3x$이므로
$f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(2) = 2$
따라서 치역은 $\{-1,\ 0,\ 2\}$

19. N 을 자연수의 집합이라 할 때, 함수 $f\ :\ N \to N \cup \{0\}$ 이

(i) p 가 소수이면 $f(p) = 1$ (ii) $f\ (mn) = nf(m) + mf(n)$

을 만족시킨다고 한다. 이 때, $f(2^{2002})$ 의 값은?

① $2001 \cdot 2^{2001}$　② $2001 \cdot 2^{2002}$　③ $2002 \cdot 2^{2001}$

④ $2002 \cdot 2^{2002}$　⑤ $2003 \cdot 2^{2001}$

해설

$f\ (mn) = nf(m) + mf(n)$ 에서 양변을 mn 으로 나누면

$$\frac{f\ (mn)}{mn} = \frac{f(m)}{m} + \frac{f(n)}{n}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(2^{2002})}{2^{2002}} &= \frac{f(2)}{2} + \frac{f(2^{2001})}{2^{2001}} \\ &= \frac{1}{2} + \left\{\frac{f(2)}{2} + \frac{f(2^{2000})}{2^{2000}}\right\} \\ &\ \vdots \\ &= 2002 \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\therefore f(2^{2002}) = 2002 \cdot 2^{2001}$

20. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x)=|x|$ ② $f(x)=-x^2$

③ $f(x)=3x$ ④ $f(x)=2x+3$

⑤ $f(x)=x^3+3x$

해설

① $f(a+b)=|a+b|$

$f(a)+f(b)=|a|+|b|$

이 때 $|a+b| \le |a|+|b|$

② $f(a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$

$f(a)+f(b)=-a^2-b^2$

③ $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$

④ $f(a+b)=2(a+b)+3$

$f(a)+f(b)=2a+3+2b+3=2(a+b)+6$

⑤ $$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2+3) \\ f(a)+f(b) &= a^3+3a+b^3+3b \\ &= a^3+b^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2+3) \end{aligned}$$