1. 두 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수가 아닌 것은 무엇인가?

① $f(x)=1-x$

② $f(x)=|x|+1$

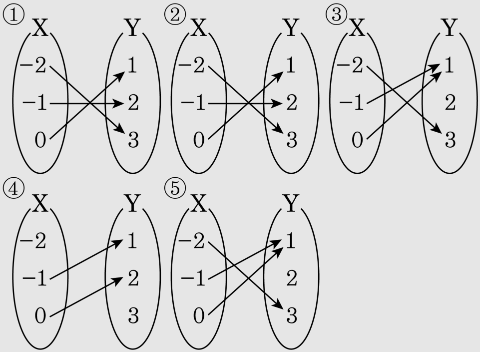
③ $f(x)=x^2+x+1$

④ $f(x)=x^3+2$

⑤ $f(x)=|x^2+x|+1$

해설

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 함수가 아닌 것은 ④ 이다.

2. 실수의 집합을 R이라 할 때, 함수 $f : R \to R$가 다음과 같이 정해져 있다. 이 때, 일대일 대응인 것은?

① $f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$

② $f(x) = x^2$

③ $f(x) = |x|$

④ $f(x) = 2$

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{x}$

해설

치역이 실수이고 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 것은 증가만 하거나 감소만 하는 그래프이다.
①은 직선으로서 $a > 0$이면 증가하고 $a < 0$이면 감소하는 그래프이다.

3. 다음 보기 중 $X=\{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f: x \rightarrow |x|^2$ ㉡ $g: x \rightarrow x+2$

㉢ $h: x \rightarrow |x|+1$ ㉣ $i: x \rightarrow x^2-1$

㉤ $j: x \rightarrow |x|+3$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1)=|-1|^2=1 \in Y$

$f(1)=|1|^2=1 \in Y$

$f(2)=|2|^2=4 \in Y$

㉡ $g(-1)=-1+2=1 \in Y$

$g(1)=1+2=3 \in Y$

$g(2)=2+2=4 \in Y$

㉢ $h(-1)=|-1|+1=2 \in Y$

$h(1)=|1|+1=2 \in Y$

$h(2)=|2|+1=3 \in Y$

㉣ $i(-1)=i(1)=0 \notin Y$

㉤ $j(2)=5 \notin Y$

그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

4. $x^2 \neq 1$이고, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$이라 할 때, $f(-x)$를 $f(x)$를 사용해서 나타내면 무엇인지 고르면?

① $f(x)$ ② $-f(x)$ ③ $\{f(x)\}^2$

④ $\dfrac{1}{f(x)}$ ⑤ $2f(x)$

해설

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

5. 다음 중 다항함수인 것을 고르면?

① $y = x^2 - 3x + 5$

② $y = \dfrac{1}{x^2}$

③ $y^2 = x$

④ $\dfrac{1}{y} = x$

⑤ $xy = 2$

해설

① $y = x^2 - 3x + 5$ 는 x에 대한 다항식이므로 다항함수이다.

② $y = \dfrac{1}{x^2}$ 은 x에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

③ $y^2 = x$ 는 $y = \pm\sqrt{x}$ 와 같이 나타내어지고 이 것은 x에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

④ $\dfrac{1}{y} = x$는 $y = \dfrac{1}{x}$ 과 같이 나타내어지고 이것은 x에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

⑤ $xy = 2$는 $y = \dfrac{2}{x}$ 과 같이 나타내어지고 이것은 x에 대한 다항식이 아니다.

6. 정수 전체의 집합에서 정의된 함수 f를 $f(x) = (x^2$을 3으로 나눈 나머지$)$로 정의할 때, 함수 f의 치역을 구하면?

① $\{0\}$ ② $\{1\}$ ③ $\{0, 1\}$
④ $\{1, 2\}$ ⑤ $\{0, 1, 2\}$

해설

모든 정수는 $3k, 3k+1, 3k+2$ (k는 정수)의 세 가지 중 하나의 꼴로 나타낼 수 있다.
(i) $x = 3k$ 일 때 $x^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
$\therefore\ f(x) = 0$
(ii) $x = 3k+1$ 일 때 $x^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$
$\therefore\ f(x) = 1$
(iii) $x = 3k+2$ 일 때 $x^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$
$\therefore\ f(x) = 1$
따라서 임의의 정수 x에 대하여 x^2을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이므로 구하는 치역은 $\{0, 1\}$이다.

7. 함수 f가 임의의 양수 m, n에 대하여 $f(mn) = f(m) + f(n)$, $f(2) = 1$ 일 때, $f(2^{2006})$의 값은 얼마인가?

① 1003 ② 2006 ③ 4012 ④ 2^{1003} ⑤ 2^{2006}

해설

$$\begin{aligned} f(2^{2006}) &= f(2 \times 2 \times \cdots \times 2) \\ &= f(2) + f(2) + \cdots + f(2) \\ &= 2006 f(2) = 2006 \end{aligned}$$

8. 함수 $f(x)$ 가 임의의 양수 $x,\ y$ 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은 무엇인가?

① $f(1) = 0$

② $f(6) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(2x)$

④ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f(8) = 3f(2)$

해설

임의의 양수 $x,\ y$ 에 대하여

$f(xy) = f(x) + f(y)$ 가 성립해야하므로

① $x = 1,\ y = 1$ 을 대입하면

$f(1) = f(1) + f(1)$

$\therefore\ f(1) = 0$

$\therefore$ 참

② $x = 2,\ y = 3$ 을 대입하면

$f(6) = f(2) + f(3)$

$\therefore$ 참

③ $x = x,\ y = x$ 를 대입하면

$f(x^2) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

$\therefore\ f(x^2) \neq f(2x)$

$\therefore$ 거짓

④ $x = x,\ y = \frac{1}{x}$ 를 대입하면

$$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

① 에서 $f(1) = 0$ 이므로

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

$\therefore$ 참

⑤ $x = 4,\ y = 2$ 를 대입하면,

$f(4 \times 2) = f(4) + f(2) \cdots$ ㉠

또, $4 = 2 \times 2$ 이므로,

$f(4) = f(2) + f(2) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $f(8) = 3f(2)$

$\therefore$ 참

9. 모든 양수 m, n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 항상 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 만족한다.
$f(2) = a, f(3) = b$ 일 때 $f(24)$ 를 a, b 를 써서 나타내면?

① $a + 2b$ ② $2a + b$ ③ $2a + 3b$

④ $3a + b$ ⑤ $3a + 2b$

해설

$$f(24) = f(2^3 \cdot 3) = f(2^3) + f(3)$$
$$f(2^3) = f(2^2 \cdot 2) = f(2^2) + f(2)$$
$$= \{f(2) + f(2)\} + f(2) = 3f(2)$$

따라서 $3f(2) + f(3) = 3a + b$

10. 임의의 두 양수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$이고 $f(3) = 1$일 때, $f(27)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x = 3,\ y = 3$ 일 때

$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 1 + 1 = 2$

$x = 9,\ y = 3$ 일 때

$f(27) = f(9 \cdot 3) = f(9) + f(3) = 2 + 1 = 3$

11. 0 이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

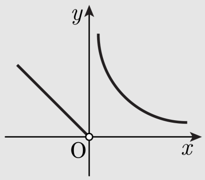
$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}(x > 0) \\ -x(x < 0) \end{cases}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

Ⅰ. $f(f(3)) + f(f(-3)) = \dfrac{10}{3}$
Ⅱ. $f(-x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$
Ⅲ. $x_1 > x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

① Ⅰ ② Ⅲ ③ Ⅰ, Ⅱ ④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅲ

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



Ⅰ. $f(f(3)) + f(f(-3)) = f\left(\dfrac{1}{3}\right) + f(3)$

$= 3 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{3}$ -<참>

Ⅱ.

ⅰ) $x > 0$ 일 때, $-x < 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$ 이므로

$f(-x) = -(-x) = x$,

$f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}} = x$

ⅱ) $x < 0$ 일 때, $-x > 0$, $\dfrac{1}{x} < 0$ 이므로

$f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x}$

ⅰ), ⅱ) 에서 $f(-x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ -<참>

Ⅲ. 반례) $\dfrac{1}{3} > -2$ 일 때,

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3 > 2 = f(-2)$ -<거짓>

따라서 옳은 것은 Ⅰ, Ⅱ 이다.

12. 다음 <보기> 중 서로 같은 함수끼리 짝지어진 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $f(x) = x - 2,\ g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

ㄴ $f(x) = |x|,\ g(x) = \sqrt{x^2}$

ㄷ 정의역이 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$일 때,
$f(x) = x^3,\ g(x) = 2x^2 + x - 2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ는 $x = 2$ 에서 다른 함수이나
ㄴ, ㄷ는 주어진 모든 정의역에서 같은 함수이다.

13. 정의역이 $\{0,\ 1\}$인 두 함수 $f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=2x+1$에 대하여 $f=g$일 때, $a-b$의 값은? (단, $a,\ b$는 상수)

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

두 함수 $f,\ g$가 서로 같으므로
정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.
즉, $f(0)=g(0),\ f(1)=g(1)$이므로
$f(0)=b,\ g(0)=1$에서 $b=1$
$f(1)=1+a+b,\ g(1)=3$에서 $a+b=2$
$\therefore a=1$
$\therefore a-b=0$

14. X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $g(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $f = g$ 가 성립하도록 하는 집합 X의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

두 함수가 같다는 것은 정의역의 임의의 x값에 대하여 그 함수 값이 같다는 것이다.
그러므로 $f(x) = g(x)$를 만족시키는 x들만을 원소로 갖는 집합이 정의역이 된다.
따라서 $2x^2 - 3x + 4 = x^2 + x + 1$, $x^2 - 4x + 3 = 0$
$(x-3)(x-1) = 0$
$\therefore x = 1,\ 3$
따라서 1, 3을 원소로 갖는 집합을 구하면 된다.
즉, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1,\ 3\}$

15. 실수를 원소로 갖는 집합 X가 정의역인 두 함수 $f(x)=x^2$과 $g(x)=x^3-2x$가 같을 때, X의 개수는 몇 개인가?

① 3개 ② 4개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

두 함수의 정의역은 같으므로 $f(x)=g(x)$에서

$x^2=x^3-2x,\ x^3-x^2-2x=0$

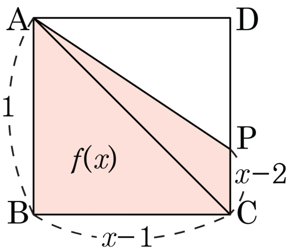
$x(x+1)(x-2)=0,\ x=-1,\ 0,\ 2$

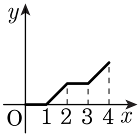
$\therefore\ \mathrm{X}=\{-1,\ 0,\ 2\}$

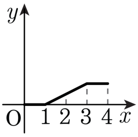
따라서 X의 공집합을 제외한

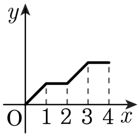
부분집합이 되므로 7개

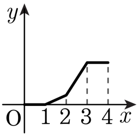
16. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

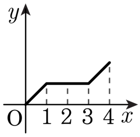


①


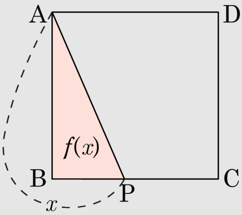
②


③


④


⑤


해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서 함수는 연속이므로 ②가 옳다.

17. 일차함수 $f(x)$는 실수 x에 대하여 다음을 만족한다. $xf(x)+f(1-x)=x^2+2$ 이 때, $f(100)$ 의 값은?

① -101　② -100　③ 0　④ 100　⑤ 101

해설

$f(x)=ax+b$ 라 놓으면

$x(ax+b)+a(1-x)+b=x^2+2$

$ax^2+(-a+b)x+(a+b)=x^2+2$

위 식은 x에 대한 항등식이므로

$a=1,\ b=1$

이때 $f(x)=x+1$ 이므로 $f(100)=101$

18. 두 집합 $X = \{0,\ 1,\ 2\}$, $Y = \{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가 $f(x) = 2x^2 - 3x$ 일 때, 함수 f의 치역을 구하면?

① $\{-1,\ 1\}$ ② $\{-1,\ 0,\ 1\}$ ③ $\{0,\ 1,\ 2\}$

④ $\{-1,\ 0,\ 2\}$ ⑤ $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

해설

$f(x) = 2x^2 - 3x$이므로

$f(0) = 0,\ f(1) = -1,\ f(2) = 2$

따라서 치역은 $\{-1,\ 0,\ 2\}$

19. N 을 자연수의 집합이라 할 때, 함수 $f : N \to N \cup \{0\}$ 이

(ⅰ) p 가 소수이면 $f(p)=1$
(ⅱ) $f(mn) = nf(m) + mf(n)$

을 만족시킨다고 한다. 이 때, $f(2^{2002})$ 의 값은?

① $2001 \cdot 2^{2001}$ ② $2001 \cdot 2^{2002}$ ③ $2002 \cdot 2^{2001}$

④ $2002 \cdot 2^{2002}$ ⑤ $2003 \cdot 2^{2001}$

해설

$f(mn) = nf(m) + mf(n)$ 에서 양변을 mn 으로 나누면

$$\frac{f(mn)}{mn} = \frac{f(m)}{m} + \frac{f(n)}{n}$$

$$\frac{f(2^{2002})}{2^{2002}} = \frac{f(2)}{2} + \frac{f(2^{2001})}{2^{2001}}$$

$$= \frac{1}{2} + \left\{\frac{f(2)}{2} + \frac{f(2^{2000})}{2^{2000}}\right\}$$

$$\vdots$$

$$= 2002 \cdot \frac{1}{2}$$

$\therefore f(2^{2002}) = 2002 \cdot 2^{2001}$

20. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x)=|x|$ ② $f(x)=-x^2$

③ $f(x)=3x$ ④ $f(x)=2x+3$

⑤ $f(x)=x^3+3x$

해설

① $f(a+b)=|a+b|$

$f(a)+f(b)=|a|+|b|$

이 때 $|a+b| \leq |a|+|b|$

② $f(a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$

$f(a)+f(b)=-a^2-b^2$

③ $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$

④ $f(a+b)=2(a+b)+3$

$f(a)+f(b)=2a+3+2b+3=2(a+b)+6$

⑤ $$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2+3) \\ f(a)+f(b) &= a^3+3a+b^3+3b \\ &= a^3+b^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2+3) \end{aligned}$$