1. 점 $A(-1,\ -1)$에 대하여 점 $P(2,\ 3)$과 대칭인 점 Q의 좌표를 구하면?

① $Q(-4,\ 5)$　② $Q(4,\ -5)$　③ $Q(-4,\ -5)$
④ $Q(-2,\ -3)$　⑤ $Q(1,\ 1)$

해설

점 P와 점 Q는 점 A에 대하여 대칭이므로
$\overline{PA}=\overline{QA}$이다.
즉 선분 PQ의 중점이 점 A이다.
$Q(x,\ y)$라 하면, 점 $P(2,\ 3)$과
점 Q를 이은 선분의 중점이 $A(-1,\ -1)$이므로

$$\frac{x+2}{2}=-1,\ \frac{y+3}{2}=-1$$

$\therefore\ x=-4,\ y=-5$

$\therefore Q(-4,\ -5)$

2. 세 점 $\mathrm{A}(a, 4)$, $\mathrm{B}(1, b)$, $\mathrm{C}(3, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 무게중심의 좌표가 $\mathrm{G}(2, 1)$ 일 때, ab 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 3 ⑤ 4

해설

무게중심의 좌표가 $\mathrm{G}(2, 1)$ 이므로

$$\frac{a+1+3}{3} = 2,\ \frac{4+b+1}{3} = 1$$

$a + 4 = 6 \quad \therefore a = 2$

$b + 5 = 3 \quad \therefore b = -2$

$\therefore ab = 2 \times (-2) = -4$

3. 일차함수 $y = x + b$ 의 그래프가 점 $(2,\ -1\ )$을 지날 때 b 의 값은?

① 1　　② 0　　③ -1　　④ -2　　⑤ -3

해설

일차함수 $y = x + b$ 의 그래프가
점 $(2,\ -1\ )$을 지나므로,
$x = 2$, $y = -1$ 를 대입하면 성립해야 하므로
$-1 = 2 + b$
$\therefore\ b = -3$

4. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$ ② $c^2 = b$ ③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$ ⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은
$x = 0$ 으로부터 $y^2 + 2by + c = 0$
y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

5. 두 점 $A(4,-3), B(a,3)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

두 점 $A(4,-3), B(a,3)$ 에 대하여

$$\overline{AB} = \sqrt{(a-4)^2 + (3+3)^2}$$
$$= \sqrt{a^2 - 8a + 52}$$
$$= 6\sqrt{2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2 - 8a + 52 = 72$

$a^2 - 8a - 20 = 0$

$(a-10)(a+2) = 0$

$\therefore a = 10 (\because a > 0)$

6. 점 $A(-2,1)$, $B(4,4)$ 를 이은 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 지나 AB 에 수직인 직선의 방정식을 l 이라고 할 때, 점 $(1,0)$ 에서 직선l 에 이르는 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

선분 AB 의 내분점의 좌표

$$M\left(\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times4+1\times1}{2+1}\right)=(2,3)$$

직선 AB 의 기울기는 $\dfrac{4-1}{4-(-2)}=\dfrac{1}{2}$

그러므로 직선 l 은 기울기가 -2 이고

$(2,3)$을 지나므로 $l: y-3=-2(x-2)$

$\therefore \quad 2x+y-7=0$

따라서 $(1,0)$ 으로부터 직선 l 까지의 거리는

$$\frac{|2\cdot1+0-7|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

7. 두 직선 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$의 교점과 점 $(2,-1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y=ax+b$이다. ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-28$

해설

$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$ 을 연립하면

교점 : $(1,3) \Rightarrow$ $(1,3),(2,-1)$을 지나는 직선

$y=\dfrac{-1-3}{2-1}(x-1)+3$

$\Rightarrow$ $y=-4x+7$

$\therefore a=-4,\ b=7$

$\therefore$ $ab=-28$

8. 원점에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때 a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 4 ② 8 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원점 (0, 0) 에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a\times 0+b\times 0+4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$$

$4=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \rightarrow 2(a^2+b^2)=16$

$\therefore\ a^2+b^2=8$

9. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$$(0,0),\ (2,6),\ (6,3)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{2}|2\cdot 3-6\cdot 6|=15$$

10. 두 점 A(1, 5), $B(-3, -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y+2)^2=13$
② $(x-1)^2+(y-2)^2=52$
③ $(x-1)^2+(y+2)^2=13$
④ $(x+1)^2+(y-2)^2=13$
⑤ $(x+1)^2+(y-2)^2=52$

해설

원의 중심은 두 점 A, B 의 중점이므로,

$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{5-1}{2}\right)=(-1, 2)$ 이다.

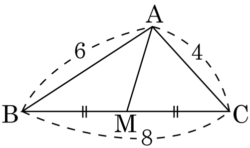
또, 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2=13$

11. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여

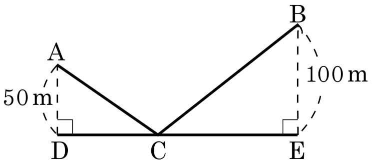
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$

$\therefore \overline{AM}^2=10$

12. 다음 그림과 같이 고압 전선 $\overline{DE}$가 지나는 곳으로부터 각각 $50\,\mathrm{m}, 100\,\mathrm{m}$ 떨어진 두 지점에 빌딩 A, B가 위치하고 있다. 변압기를 D와 E 사이의 한 지점에 설치하여 빌딩 A, B에 전력을 공급하려고 한다. D와 E 사이의 거리가 $200\,\mathrm{m}$일 때, 전체 전선의 길이 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 : ________ m

▷ 정답 : 250 m

해설

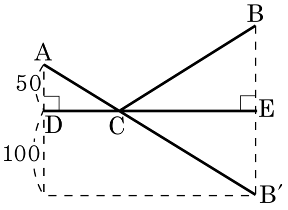
B를 $\overline{DE}$에 대해 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$\overline{BC}=\overline{CB'}$이므로

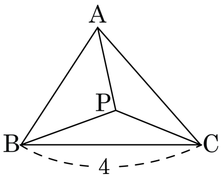
$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AC}+\overline{CB'}\geq\overline{AB'}$

따라서 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 최솟값은

$\overline{AB'}=\sqrt{200^2+150^2}=250(\,\mathrm{m})$



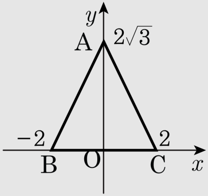
13. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 임의의 내부의 한 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은?



① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

해설

다음 그림과 같이 직선 BC를 x축,
$\overline{BC}$의 중점을 원점 O,
직선 AO를 y축으로 잡으면
$A\left(0, 2\sqrt{3}\right), B(-2, 0), C(2, 0)$



$P(x, y)$라 하면

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$$
$$= x^2+\left(y-2\sqrt{3}\right)^2+(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2$$
$$= 3x^2+3y^2-4\sqrt{3}y+20$$
$$= 3x^2+3\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+16$$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은

$x=0, y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$일 때, 최솟값 16을 갖는다.

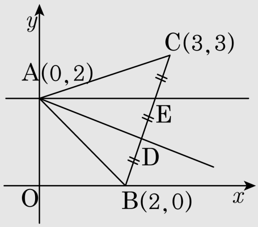
14. 점 $A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(3,3)$ 으로 이루어진 삼각형ABC 가 있다. $\triangle ABC$ 가 직선 $(k+1)x+(k-1)y=2(k-1)$ 에 의해 두 개의 도형으로 나누어지며, 한 쪽의 넓이가 다른 쪽 넓이의 두 배가 될 때의 k 값을 구하여라. (단, k 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$k(x+y-2)+x-y+2=0$ 은 k 에 관계없이
$A(0,2)$ 를 지나는 직선이므로
$\triangle ABC$ 를 그림과 같이
2 개의 삼각형으로 나누게 된다



따라서 $\overline{BC}$ 를 $1:2$ 또는 $2:1$ 로 내분하는
점D, E 를 지나게 된다.

$D\left(\frac{7}{3},1\right)$, $E\left(\frac{8}{3},2\right)$ 이므로

(ⅰ) D 를 지날 때,

$k\left(\frac{7}{3}+1-2\right)+\frac{7}{3}-1+2=0$

$k=-\frac{5}{2}$ 이므로 부적합 ($\because k$ 는 정수)

(ⅱ) E 를 지날 때,

$k\left(\frac{8}{3}+2-2\right)+\frac{8}{3}-2+2=0$

$\therefore\ k=-1$

15. 직선 $(k+1)x-(k-2)y-3=0$에 대하여 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, k는 실수)

< 보 기>

㉠ $k=-1$이면 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

㉡ $k=2$이면 y축에 평행이다.

㉢ k의 값에 관계없이 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

① ㉢ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $k=-1$이면 $y=1$이므로 점 $(0,\ 1)$을 지난다.
㉡ $k=2$이면 $x=1$이므로 y축에 평행이다.
㉢ $(x-y)k+(x+2y-3)=0$이므로 k의 값에 관계없이 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

16. 평행한 두 직선 $12x-5y=3$, $12x-5y=29$ 사이의 거리를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 12 ⑤ 26

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점을 택한 후 나머지 직선과의 거리를 구하면 된다.

$12x-5y=3$ 의 $\left(0, -\dfrac{3}{5}\right)$

$$\therefore \frac{\left|12\times 0+\left(-\dfrac{3}{5}\right)\times(-5)-29\right|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{26}{13}=2$$

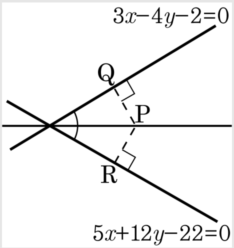
17. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

18. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

Ⅰ. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다.
Ⅱ. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다.
Ⅲ. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y좌표는 5의 배수이다.

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅲ ④ Ⅰ, Ⅲ ⑤ Ⅱ, Ⅲ

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을 P$(a,\ b)$ 라고 하면

$$\frac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}}=\frac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$$

$3a+2b-1=2a-3b+1$ 또는

$3a+2b-1=-2a+3b-1$ 이므로

$a+5b-2=0,\ 5a-b=0$ 에서

$x+5y-2=0$, $5x-y=0$

즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와

$y=5x$ 위에 있는 모든 점들은

주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.

Ⅰ. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.

Ⅱ. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$

위의 점, 예를 들면 $(-3,\ 1)$ 이 있다.

Ⅲ. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,

y 좌표는 5 의 배수이다.

19. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{A}(-2,3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$

② $2x+3y+1=0$

③ $4x-3y+1=0$

④ $x-4y-3=0$

⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$의 중점의 좌표를

$\mathrm{P}(X,\ Y)$ 라 하면,

$\mathrm{P}(X,\ Y)=\mathrm{P}\left(\dfrac{x-2}{2},\ \dfrac{y+3}{2}\right)$ 이므로

$X=\dfrac{x-2}{2}$, $Y=\dfrac{y+3}{2}$

$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$

이것을 $2x+y-4=0$ 에 대입하면

$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$

$4X+2Y-3=0$

$\therefore\ 4x+2y-3=0$

20. 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p,q) 이다. 이 때 $p-q$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 을
표준형으로 고치면
$(x+a)^2+(y-2a)^2=5a^2-20a+25$
이 원의 넓이는
$\pi(5a^2-20a+25)=5\pi(a-2)^2+5\pi$
따라서 $a=2$ 일 때 넓이가 최소.
중심은 $(-2,4)$
$\therefore p=-2,\ q=4$
$\therefore p-q=-6$