1. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \therefore\ a + b = 14$

2. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$a^2 + b^2 = 5$

3. 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면
$4-x=-x^2+kx \Rightarrow x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$이어야 한다.
$D=(k+1)^2-16=0 \Rightarrow k+1=\pm 4$
$\therefore k=3\ (\because k>0)$

4. 이차함수 $y=2x^2-6x-4$는 $x=a$ 일 때 최솟값 b를 갖는다. $a-b$ 의 값을 구하면?

① -8 ② -4 ③ 6 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$y=2x^2-6x-4=2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{2}-4=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{2}$$

아래로 볼록하고 꼭짓점이 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{17}{2}\right)$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ 일 때, 최솟값 $-\frac{17}{2}$ 을 갖는다.

$\therefore a-b=\frac{3}{2}-\left(-\frac{17}{2}\right)=10$

5. 이자함수 $y = x^2 - 6x - 5$ 의 최솟값은?

① -14 ② 14 ③ -5 ④ 5 ⑤ 4

해설

$y = x^2 - 6x - 5$
$= x^2 - 6x + 9 - 9 - 5$
$= (x-3)^2 - 14$

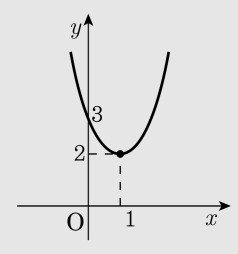
$\therefore x = 3$ 일 때, 최솟값 -14 를 가진다.

6. 함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 x의 범위가 $0 < x < 1$ 일 때, 이 함수의 함숫값의 범위를 구하면?

① $-2 < y < 3$　② $-2 < y < 2$　③ $0 < y < 3$
④ $0 < y < 2$　⑤ $2 < y < 3$

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$
따라서 함수의 그래프는 다음의 그림과 같다.
$f(0) = 3,\ f(1) = 2$ 이므로
함숫값의 범위은 $2 < y < 3$



7. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.
$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$
$y = -(x-9)^2 + 81$
따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

8. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$과 x축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 모든 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는
이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β
라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 2k, \ \alpha\beta = 2k + 3$
$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5}$에서 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$이므로
$20 = (2k)^2 - 4(2k + 3), \ 4k^2 - 8k - 12 = 20$

$k^2 - 2k - 8 = 0$
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 2이다.

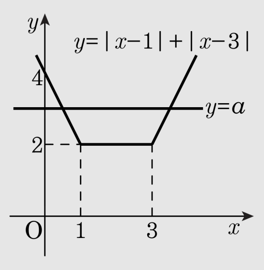
9. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a<2$ ④ $a>2$ ⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면

$a>2$



10. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t$ 라 하면

$x = 2t - 1$, $y = 5t + 3$, $z = 3t - 2$ 이므로

$x^2 - y^2 + z^2 = (2t-1)^2 - (5t+3)^2 + (3t-2)^2 = -12t^2 - 46t - 4$

$\cdots$ ㉠

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이므로

$t \geq \frac{1}{2}$, $t \geq -\frac{3}{5}$, $t \geq \frac{2}{3}$

$\therefore\ t \geq \frac{2}{3}$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$t = \frac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$

11. x, y가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$
$= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3$
$= -(x-1)^2 - (y-2)^2 + 8$
$x,\ y$는 실수이므로 $(x-1)^2 \geq 0,\ (y-2)^2 \geq 0$
따라서 $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$은
$x - 1 = 0,\ y - 2 = 0$일 때 최댓값 8을 갖는다.

12. 밑변의 길이와 높이의 합이 36 cm 인 삼각형의 최대 넓이를 구하여라.

▶ 답 : ________ cm^2

▷ 정답 : 162 cm^2

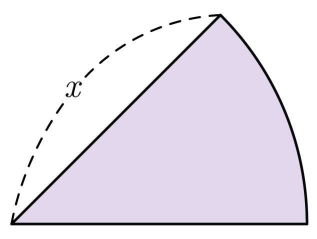
해설

삼각형의 밑변의 길이를 x cm, 넓이를 $y\,\text{cm}^2$ 라 하자.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x(36-x) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-36x) \\ &= -\frac{1}{2}(x-18)^2+162 \end{aligned}$$

따라서 삼각형의 최대 넓이는 162 cm^2

13. 둘레의 길이가 12 인 부채꼴에서 반지름의 길이를 x 라 하고, 부채꼴의 넓이를 y 라 할 때, 부채꼴의 넓이를 최대가 되게 할 때, 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

부채꼴의 넓이를 y, 반지름의 길이를 x 라 하면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (12 - 2x) \\ &= x(6 - x) \\ &= -x^2 + 6x \\ &= -(x^2 - 6x + 9 - 9) \\ &= -(x - 3)^2 + 9 \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
따라서 꼭짓점이 $(3, 9)$ 이므로 반지름의 길이 $x = 3$ 일 때, 부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 9를 가진다.

14. 직각을 낀 두 변의 길이 x, y의 합이 10이고 넓이가 8 이상인 직각삼각형이 있을 때, 다음 물음에 알맞게 답한 것을 고르면?

(1) x의 값의 범위를 구하여라.
(2) 빗변의 길이를 z라 할 때, z^2을 x에 관한 식으로 나타내어라.
(3) z^2의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

① (1) $2 \le x \le 9$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 52

② (1) $1 \le x \le 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 51

③ (1) $2 \le x \le 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 50

④ (1) $2 \le x \le 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 52

⑤ (1) $2 \le x \le 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 50

해설

(1) $x + y = 10$에서 $y = 10 - x$이고
삼각형의 넓이가 8 이상이므로
$\frac{1}{2}xy \ge 8,\ \frac{1}{2}x(10 - x) \ge 8$
$x^2 - 10x + 16 \le 0,\ (x - 2)(x - 8) \le 0$
$\therefore 2 \le x \le 8$
(2) 피타고라스의 정리에 의해
$z^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2$
$= 2x^2 - 20x + 100$
(3) $z^2 = 2x^2 - 20x + 100 = 2(x - 5)^2 + 50$
이 때, $2 \le x \le 8$이므로 z^2은 $x = 5$일 때
최솟값 50 , $x = 2$ 또는 $x = 8$일 때
최댓값 68을 갖는다.

15. 지상 40m 높이에서 vm/s 의 속도로 똑바로 위로 쏘아올린 공이 t 초 후에 지면으로부터 hm 만큼의 높이가 될 때, $h = vt + 40 - 5t^2$ 의 식이 성립한다. 공이 3 초 후에 최고 높이에 도달했을 때, 이 최고 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 85 m

해설

$h = -5t^2 + vt + 40 = -5\left(t - \frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v^2}{20} + 40$

이 물체는 $t = \frac{v}{10}$ 일 때, 최고 높이 $\frac{v^2}{20} + 40$ 에 도달하고, $\frac{v}{10} = 3$ 이므로 $v = 30$ 이다.

따라서 최고 높이는 85m 이다.

16. 지면으로부터 20m 높이에서 초속 vm 로 쏘아 올린 공의 x 초 후의 높이를 ym 라 하면 x 와 y 사이에는 $y = 20 + \frac{v}{5}x - \frac{v}{10}x^2$ 의 관계가 있다. 공이 도달한 최고 높이가 25 m 일 때, 공의 속도를 구하여라.

▶ 답 : ______ m/s

▷ 정답 : 50 m/s

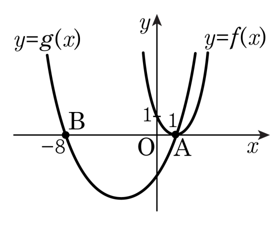
해설

$y = 20 + \frac{v}{5}x - \frac{v}{10}x^2 = -\frac{v}{10}(x-1)^2 + \frac{v}{10} + 20$

이 물체는 $x = 1$ 일 때, 최고 높이 $\frac{v}{10}+20$ 에 도달하고, $\frac{v}{10}+20 = 25$ 이므로 $v = 50$ 이다.

따라서 공의 속도는 초속 50m 이다.

17. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x축과 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$에서 접하고, 이차함수 $y = g(x)$의 그래프는 x축과 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(-8,\ 0)$에서 만난다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 x^2의 계수가 모두 1일 때, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$의 근은?



① $x = 1$

② $x = -\frac{1}{3}$ 또는 $x = 1$

③ $x = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 3$

④ $x = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 1$

⑤ $x = -5$ 또는 $x = 1$

해설

$f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = (x+8)(x-1)$이므로

$f(x) + 2g(x) = (x-1)^2 + 2(x+8)(x-1) = 3x^2 + 12x - 15$

따라서, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$,

즉 $3x^2 + 12x - 15 = 0$ 의 근은 $3(x+5)(x-1) = 0$

$\therefore x = -5$ 또는 $x = 1$

18. 이차함수 $y=(x-5)^2+1$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=10$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① 16 ② 20 ③ 22 ④ 26 ⑤ 30

해설

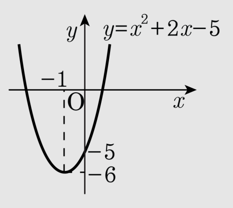
이차함수 $y=(x-5)^2+1$ 의 그래프는
직선 $x=5$ 에 대하여 대칭이고
$\overline{\mathrm{PQ}}=10$ 이므로 두 점 P, Q 의 x 좌표는
각각 0, 10 이다.
따라서 점 P (또는 Q) 의 y 좌표를 구하면
$(0-5)^2+1=26$ 이므로
$\therefore\ a=26$

19. $-2 \le x \le 1$ 일 때, 함수 $y = |x^2+2x-5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

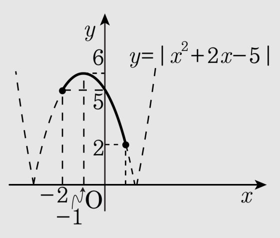
① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$y = x^2 + 2x - 5 = (x+1)^2 - 6$ 이므로
$y = x^2 + 2x - 5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \le x \le 1$ 에서
함수 $y = |x^2+2x-5|$ 의 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $y = 6$, 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $y = 2$ 이므로
최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

20. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

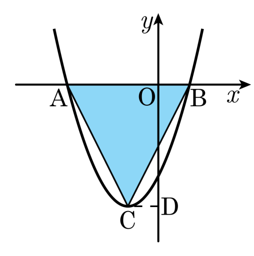
x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$

$y^2 + y - 6 \leq 0$, $(y+3)(y-2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

21. 다음 그림과 같이 $y=x^2+2x-3$ 의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 A ,B , 꼭짓점을 C 라 할 때, △ABC 의 넓이는?



① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

해설

$y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

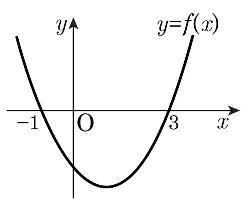
꼭짓점 C$(-1,-4)$

$y=0$ 일 때 $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)=0$ 이므로

A$(-3,0)$, B$(1,0)$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times4\times4=8$

22. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x-1) = 0$의 두 근의 합은?



① -1 ② 0 ③ 1

④ 2 ⑤ 3

해설

$y = f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 3이므로

$f(x) = a(x+1)(x-3)\ (a>0)$으로 놓을 수 있다.

이때, $f(2x-1) = a(2x-1+1)(2x-1-3) = 4ax(x-2)$이므로

$f(2x-1) = 0$에서

$4ax(x-2) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$

따라서 두 근의 합은 2이다.

23. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때 최대이고 최댓값은 16 이다. 또, 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 A, B 라고 할 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 8$ 이다. 이 때, $|a| + |b| + |c|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때
최대이고 최댓값은 16 이므로
$y = ax^2 + bx + c = a(x-1)^2 + 16 = ax^2 - 2ax + a + 16\ (a < 0)$
$\therefore b = -2a,\ c = a + 16(a < 0) \cdots\cdots$ ㉠
$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라고 하면
$\overline{\mathrm{AB}} = |\beta - \alpha| = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\dfrac{\sqrt{4a^2 - 4a(a+16)}}{-a} = 8$
$\therefore \sqrt{-64a} = -8a$ 양변을 제곱하면
$-64a = 64a^2,\ \ a^2 = -a,\ a(a+1) = 0$
그런데 $a < 0$ 이므로 $a = -1$
$\therefore b = -2a = 2,\ c = a + 16 = 15$
$\therefore |a| + |b| + |c| = 18$

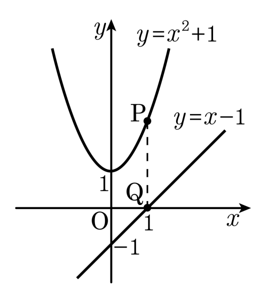
24. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖고 제2 사분면을 지나지 않는다고 할 때, a의 값의 범위는?

① $a \geq -\frac{3}{4}$ ② $a \leq -\frac{3}{4}$ ③ $a \leq \frac{3}{4}$
④ $a \leq 3$ ⑤ $a \geq -3$

해설

$y = a(x-2)^2 + 3 (a < 0)$
$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$
$(y\text{절편}) \leq 0, 4a + 3 \leq 0$
$\therefore\ a \leq -\frac{3}{4}$

25. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점P 에서 y 축에 평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는 점을 Q 라 할 때 $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하면?



① $\frac{1}{2}$　② $\frac{7}{4}$　③ $\frac{6}{5}$

④ $\frac{7}{3}$　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\overline{PQ}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ t^2 + 1)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ t - 1)$

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= t^2 + 1 - (t - 1)\\ &= t^2 - t + 2\\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$