

1. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표가 6, b 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표는

이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$ 의 실근이다.

$x^2 - 8x + a = 0$ 에 $x = 6$ 을 대입하면

$$36 - 48 + a = 0 \text{에서 } a = 12$$

따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$ 에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$

$x = 2$ 또는 $x = 6$

$$\therefore b = 2 \therefore a + b = 14$$

2. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 2

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$$\therefore (a + 2)^2 + 2(b - 1)^2 = 0$$

이 때, a, b 가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

3. 함수 $y = -x^2 + kx$ 의 그래프가 직선 $y = -x + 4$ 에 접할 때, 양수 k 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$ 가 $y = -x + 4$ 에 접하려면

$4 - x = -x^2 + kx \Rightarrow x^2 - (k + 1)x + 4 = 0$ 의 판별식은 $D = 0$ 이어야 한다.

$$D = (k + 1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow k + 1 = \pm 4$$

$$\therefore k = 3 (\because k > 0)$$

4. 이차함수 $y = 2x^2 - 6x - 4$ 는 $x = a$ 일 때 최솟값 b 를 갖는다. $a - b$ 의 값을 구하면?

① -8

② -4

③ 6

④ 10

⑤ 20

해설

$$y = 2x^2 - 6x - 4 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{2} - 4 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{2}$$

아래로 볼록하고 꼭짓점이 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{17}{2}\right)$

$\therefore x = \frac{3}{2}$ 일 때, 최솟값 $-\frac{17}{2}$ 을 갖는다.

$$\therefore a - b = \frac{3}{2} - \left(-\frac{17}{2}\right) = 10$$

5. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 5$ 의 최솟값은?

① -14

② 14

③ -5

④ 5

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 6x - 5 \\ &= x^2 - 6x + 9 - 9 - 5 \\ &= (x - 3)^2 - 14\end{aligned}$$

$\therefore x = 3$ 일 때, 최솟값 -14 를 가진다.

6. 함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 x 의 범위가 $0 < x < 1$ 일 때, 이 함수의 함숫값의 범위를 구하면?

① $-2 < y < 3$

② $-2 < y < 2$

③ $0 < y < 3$

④ $0 < y < 2$

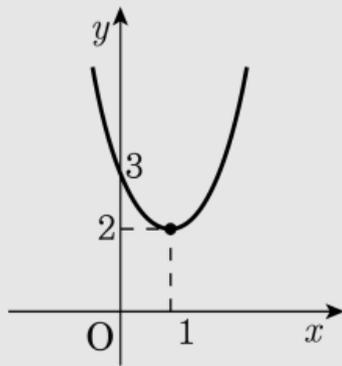
⑤ $2 < y < 3$

해설

$$y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$$

따라서 함수의 그래프는 다음의 그림과 같다.

$f(0) = 3$, $f(1) = 2$ 이므로
함숫값의 범위는 $2 < y < 3$



7. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11

② 21

③ 25

④ 81

⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

8. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 일 때, 모든 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2k, \quad \alpha\beta = 2k + 3$$

$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5}$ 에서 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로

$$20 = (2k)^2 - 4(2k + 3), \quad 4k^2 - 8k - 12 = 20$$

$$k^2 - 2k - 8 = 0$$

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k 의 값의 합은 2이다.

9. x 의 방정식 $|x-1| + |x-3| = a$ 가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < 1$

② $a > 1$

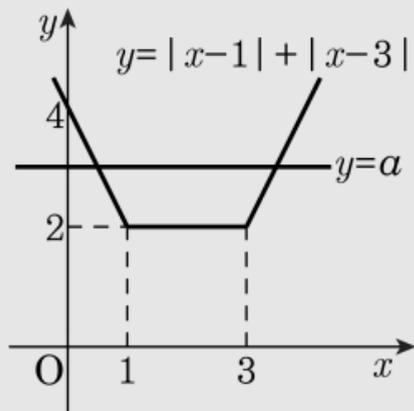
③ $a < 2$

④ $a > 2$

⑤ $a < 3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면
 $a > 2$



10. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t \text{ 라 하면}$$

$x = 2t - 1, y = 5t + 3, z = 3t - 2$ 이므로

$$x^2 - y^2 + z^2 = (2t - 1)^2 - (5t + 3)^2 + (3t - 2)^2 = -12t^2 - 46t - 4 \dots \textcircled{1}$$

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 이므로

$$t \geq \frac{1}{2}, t \geq -\frac{3}{5}, t \geq \frac{2}{3}$$

$$\therefore t \geq \frac{2}{3}$$

이 범위에서 $\textcircled{1}$ 은 감소하므로

$t = \frac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$$-12 \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$$

11. x, y 가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

$$= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3$$

$$= -(x-1)^2 - (y-2)^2 + 8$$

x, y 는 실수이므로 $(x-1)^2 \geq 0, (y-2)^2 \geq 0$

따라서 $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$ 은

$x-1=0, y-2=0$ 일 때 최댓값 8을 갖는다.

12. 밑변의 길이와 높이의 합이 36 cm 인 삼각형의 최대 넓이를 구하여라.

▶ 답: cm²

▷ 정답: 162 cm²

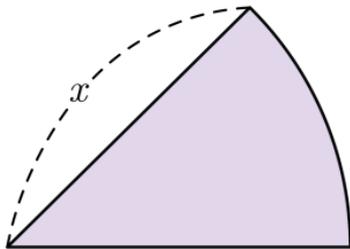
해설

삼각형의 밑변의 길이를 x cm, 높이를 y cm² 라 하자.

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2}x(36 - x) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 36x) \\ &= -\frac{1}{2}(x - 18)^2 + 162\end{aligned}$$

따라서 삼각형의 최대 넓이는 162 cm²

13. 둘레의 길이가 12 인 부채꼴에서 반지름의 길이를 x 라 하고, 부채꼴의 넓이를 y 라 할 때, 부채꼴의 넓이를 최대가 되게 할 때, 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

부채꼴의 넓이를 y , 반지름의 길이를 x 라 하면

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{2} \times x \times (12 - 2x) \\
 &= x(6 - x) \\
 &= -x^2 + 6x \\
 &= -(x^2 - 6x + 9 - 9) \\
 &= -(x - 3)^2 + 9
 \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $(3, 9)$ 이므로 반지름의 길이 $x = 3$ 일 때, 부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 9를 가진다.

14. 직각을 낀 두 변의 길이 x, y 의 합이 10이고 넓이가 8 이상인 직각삼각형이 있을 때, 다음 물음에 알맞게 답한 것을 고르면?

- (1) x 의 값의 범위를 구하여라.
 (2) 빗변의 길이를 z 라 할 때, z^2 을 x 에 관한 식으로 나타내어라.
 (3) z^2 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

- ① (1) $2 \leq x \leq 9$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 52
 ② (1) $1 \leq x \leq 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 51
 ③ (1) $2 \leq x \leq 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 50
 ④ (1) $2 \leq x \leq 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 52
 ⑤ (1) $2 \leq x \leq 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 50

해설

- (1) $x + y = 10$ 에서 $y = 10 - x$ 이고
삼각형의 넓이가 8 이상이므로

$$\frac{1}{2}xy \geq 8, \quad \frac{1}{2}x(10 - x) \geq 8$$

$$x^2 - 10x + 16 \leq 0, \quad (x - 2)(x - 8) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 8$$

- (2) 피타고라스의 정리에 의해

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2 \\ &= 2x^2 - 20x + 100 \end{aligned}$$

- (3) $z^2 = 2x^2 - 20x + 100 = 2(x - 5)^2 + 50$

이 때, $2 \leq x \leq 8$ 이므로 z^2 은 $x = 5$ 일 때
최솟값 50, $x = 2$ 또는 $x = 8$ 일 때
최댓값 68을 갖는다.

15. 지상 40m 높이에서 v m/s 의 속도로 똑바로 위로 쏘아올린 공이 t 초 후에 지면으로부터 h m 만큼의 높이가 될 때, $h = vt + 40 - 5t^2$ 의 식이 성립한다. 공이 3 초 후에 최고 높이에 도달했을 때, 이 최고 높이를 구하여라.

▶ 답: m

▷ 정답: 85 m

해설

$$h = -5t^2 + vt + 40 = -5 \left(t - \frac{v}{10} \right)^2 + \frac{v^2}{20} + 40$$

이 물체는 $t = \frac{v}{10}$ 일 때, 최고 높이 $\frac{v^2}{20} + 40$ 에 도달하고, $\frac{v}{10} = 3$

이므로 $v = 30$ 이다.

따라서 최고 높이는 85m 이다.

16. 지면으로부터 20m 높이에서 초속 v m 로 쏘아 올린 공의 x 초 후의 높이를 y m 라 하면 x 와 y 사이에는 $y = 20 + \frac{v}{5}x - \frac{v}{10}x^2$ 의 관계가 있다. 공이 도달한 최고 높이가 25m 일 때, 공의 속도를 구하여라.

▶ 답: m/s

▷ 정답: 50 m/s

해설

$$y = 20 + \frac{v}{5}x - \frac{v}{10}x^2 = -\frac{v}{10}(x-1)^2 + \frac{v}{10} + 20$$

이 물체는 $x = 1$ 일 때, 최고 높이 $\frac{v}{10} + 20$ 에 도달하고, $\frac{v}{10} + 20 =$

25 이므로 $v = 50$ 이다.

따라서 공의 속도는 초속 50m 이다.

18. 이차함수 $y = (x - 5)^2 + 1$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하자. $\overline{PQ} = 10$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① 16

② 20

③ 22

④ 26

⑤ 30

해설

이차함수 $y = (x - 5)^2 + 1$ 의 그래프는
직선 $x = 5$ 에 대하여 대칭이고
 $\overline{PQ} = 10$ 이므로 두 점 P, Q 의 x 좌표는
각각 0, 10 이다.

따라서 점 P (또는 Q) 의 y 좌표를 구하면

$$(0 - 5)^2 + 1 = 26 \text{ 이므로}$$

$$\therefore a = 26$$

19. $-2 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 4

② 5

③ 6

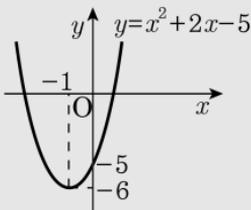
④ 7

⑤ 8

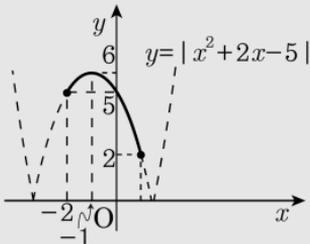
해설

$y = x^2 + 2x - 5 = (x + 1)^2 - 6$ 이므로

$y = x^2 + 2x - 5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 에서

함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $y = 6$, 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $y = 2$ 이므로

최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

20. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$$

$$y^2 + y - 6 \leq 0, (y + 3)(y - 2) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

21. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 A, B, 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?

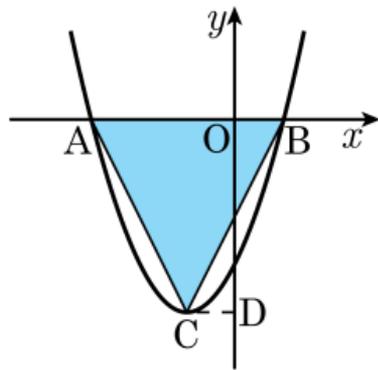
① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10



해설

$$y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$$

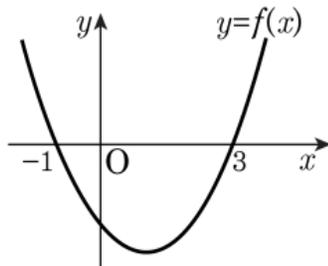
꼭짓점 $C(-1, -4)$

$y = 0$ 일 때 $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0$ 이므로

$A(-3, 0)$, $B(1, 0)$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

22. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x-1) = 0$ 의 두 근의 합은?



- ① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

해설

$y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-1, 3$ 이므로
 $f(x) = a(x+1)(x-3)$ ($a > 0$)으로 놓을 수 있다.

이때, $f(2x-1) = a(2x-1+1)(2x-1-3) = 4ax(x-2)$ 이
므로

$$f(2x-1) = 0 \text{에서}$$

$$4ax(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 두 근의 합은 2이다.

23. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때 최대이고 최댓값은 16 이다.
 또, 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 A, B 라고 할 때, $\overline{AB} = 8$ 이다.
 이 때, $|a| + |b| + |c|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때

최대이고 최댓값은 16 이므로

$$y = ax^2 + bx + c = a(x-1)^2 + 16 = ax^2 - 2ax + a + 16 \quad (a < 0)$$

$$\therefore b = -2a, \quad c = a + 16 \quad (a < 0) \quad \text{.....} \textcircled{㉠}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\overline{AB} = |\beta - \alpha| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \quad \text{.....} \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } \frac{\sqrt{4a^2 - 4a(a+16)}}{-a} = 8$$

$\therefore \sqrt{-64a} = -8a$ 양변을 제곱하면

$$-64a = 64a^2, \quad a^2 = -a, \quad a(a+1) = 0$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $a = -1$

$$\therefore b = -2a = 2, \quad c = a + 16 = 15$$

$$\therefore |a| + |b| + |c| = 18$$

24. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖고 제2사분면을 지나지 않는다고 할 때, a 의 값의 범위는?

① $a \geq -\frac{3}{4}$

② $a \leq -\frac{3}{4}$

③ $a \leq \frac{3}{4}$

④ $a \leq 3$

⑤ $a \geq -3$

해설

$$y = a(x - 2)^2 + 3(a < 0)$$

$$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$$

$$(y\text{절편}) \leq 0, 4a + 3 \leq 0$$

$$\therefore a \leq -\frac{3}{4}$$

25. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점 P 에서 y 축에
 평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는
 점을 Q 라 할 때 \overline{PQ} 의 최솟값을 구하면?

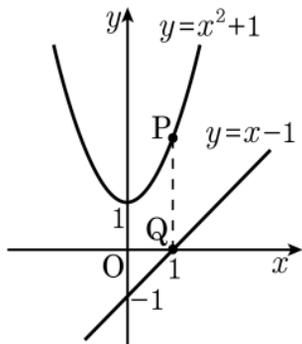
① $\frac{1}{2}$

② $\frac{7}{4}$

③ $\frac{6}{5}$

④ $\frac{7}{3}$

⑤ $\frac{5}{2}$



해설

\overline{PQ} 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의
 x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를
 $(t, t^2 + 1)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t, t - 1)$

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= t^2 + 1 - (t - 1) \\ &= t^2 - t + 2 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, \overline{PQ} 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$