1. 다음 중 정의역이 $\{0, 1, 2\}$인 함수 f의 그래프가 될 수 있는 것은?

① $\{(0,1),(1,2)\}$　② $\{(0,1),(1,1),(2,1)\}$

③ $\{(1,2),(1,0),(2,2)\}$　④ $\{(0,1),(0,2),(2,0)\}$

⑤ $\{(2,1),(2,2),(2,3)\}$

해설

$f(0)=a,\ f(1)=b,\ f(2)=c$라 하면,
함수 f의 그래프는
$(0,a),(1,b),(2,c)$의 꼴이어야 한다.

2. 집합 $A = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 가 다음과 같을 때, 항등함수가 아닌 것은?

① $f : x \to 2|x|$ ② $f : x \to x^3$ ③ $f : x \to x^5$

④ $f : x \to x$ ⑤ $f : x \to x|x|$

해설

①$f(-1) = 2,\ f(0) = 0,\ f(1) = 2$ 이므로 항등함수가 아니다.
①, ②, ③, ④$f(-1) = -1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1$ 이므로 모두 항등함수이다.

3. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2x - 3$에 대하여 $f(f(f(x))) = x$가 되는 x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

함수 $f(x) = 2x - 3$에 대하여
$f(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$
$f(f(f(x))) = f(4x - 9) = 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21$
$f(f(f(x))) = x$이므로 $8x - 21 = x$
$\therefore x = 3$

4. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right)=3x+2$를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$f\left(\frac{x+4}{2}\right)=3x+2$ 에서

$\frac{x+4}{2}=2$ 이면 $x=0$ 이므로

$f(2)=3\cdot 0+2=2$

5. 두 함수 $f(x)=2x+3$, $g(x)=-4x-5$ 일 때, $(h\circ f)(x)=g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h\circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① 5 ② 3 ③ 1 ④ −3 ⑤ −5

해설

$h(x)=ax+b$ 로 놓으면
$(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(2x+3)$
$=a(2x+3)+b=2ax+3a+b$
그런데, $(h\circ f)(x)=g(x)$ 이므로
$2ax+3a+b=-4x-5$,
$2a=-4,\ 3a+b=-5$
즉, $a=-2, b=1$ 이므로 $h(x)=-2x+1$
$(h\circ g)(-2)=h(g(-2))=h(3)=-5$

해설

$(h\circ f)(x)=g(x)$ 에서
$h(f(x))=g(x)$ 이고 $f(x)=2x+3$ 이므로
$h(2x+3)=g(x)$
또한, $(h\circ g)(-2)=h(g(-2))=h(3)$
$h(3)=g(0)=-5$

6. 다음 중 임의의 실수 a 에 대하여 $y=|x-a|+a-1$ 의 그래프와 항상 만나지 않는 직선의 방정식을 구하면?

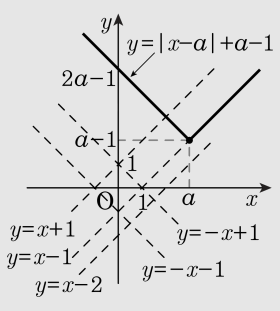
① $y=x+1$ ② $y=x-1$ ③ $y=x-2$

④ $y=-x-1$ ⑤ $y=-x+1$

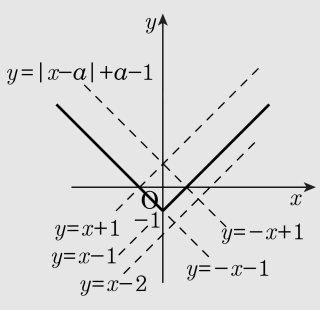
해설

a 의 부호에 따라 그래프의 위치가 달라진다.

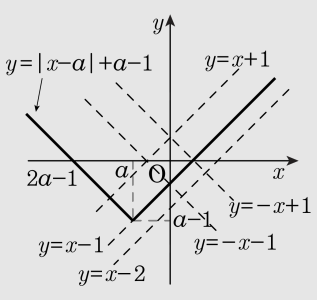
i) $a>0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서, $y=|x-a|+a-1$ 은 $y=x+1$,
$y=x-1$ 과 만나며 $a\le 1$ 일 때
$y=-x+1$ 도 만난다.



ii) $a=0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과
만나지 않는 그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.



iii) $a<0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과 만나지 않는
그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.



i), ii), iii) 에서 $y=|x-a|+a-1$ 의
그래프와 항상 만나지 않는 직선은 $y=x-2$ 이다.

7. $\dfrac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{c}{x+1}$ 가 x 에 관한 항등식이 되도록 실수 $a,\ b,\ c$ 의 값을 정하였을 때, abc 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 6 ④ 12 ⑤ 24

해설

$$\frac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} \cdots ①$$

①의 양변에 $(x-1)^2(x+1)$ 을 곱하면

$$4x^2 = a(x-1)(x+1) + b(x+1) + c(x-1)^2 \cdots ②$$

②가 x 에 관한 항등식이므로

$x = 1, -1, 0$ 을 각각 대입하면

$4 = 2b,\ 4 = 4c,\ 0 = -a + b + c$

$\therefore\ a = 3,\ b = 2,\ c = 1$

$\therefore\ abc = 6$

8. 다음 분수함수의 그래프 중에서 평행이동하여 $y=-\frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것을 고르면?

① $y=\frac{x+4}{x+3}$ ② $y=\frac{x+4}{x-3}$ ③ $y=\frac{4x-4}{2x-1}$
④ $y=\frac{2x}{2x-1}$ ⑤ $y=\frac{x+3}{2-x}$

해설

① $y=\frac{x+4}{x+3}=\frac{(x+3)+1}{x+3}=\frac{1}{x+3}+1$

② $y=\frac{x+4}{x-3}=\frac{(x-3)+7}{x-3}=\frac{7}{x-3}+1$

③ $y=\frac{4x-4}{2x-1}=\frac{2(2x-1)-2}{2x-1}=\frac{-2}{2x-1}+2=\frac{-1}{x-\frac{1}{2}}+2$

④ $y=\frac{2x}{2x-1}=\frac{(2x-1)+1}{2x-1}=\frac{1}{2x-1}+1=\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}+1$

⑤ $y=\frac{x+3}{2-x}=\frac{-(2-x)+5}{2-x}=\frac{-5}{x-2}-1$

9. 함수 $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수 $f^{-1}(x) = \dfrac{4x-3}{-x+2}$ 이다. 이 때 함수 $y = |x-a|+b$ 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

역함수의 성질에 의해 $(f^{-1})^{-1} = f$ 이다.
따라서 $f^{-1}(x) = y$ 라 놓고
$y = \dfrac{4x-3}{-x+2}$ 에서 역함수를 구하면
$x = \dfrac{4y-3}{-y+2} \rightarrow x(-y+2) = 4y-3$
$\rightarrow -xy+2x = 4y-3 \rightarrow (4+x)y = 2x+3$
$\therefore y = \dfrac{2x+3}{4+x} \quad \therefore \dfrac{ax+b}{x+c} = \dfrac{2x+3}{x+4}$
$\therefore a = 2,\ b = 3,\ c = 4$
함수 $y = |x-2|+3$ 에서 $x = 2$ 일 때 최솟값 3을 가진다.

10. $0 < x \le 1$일 때, 무리식 $\sqrt{1+\dfrac{2x+1}{x^2}} - \sqrt{1-\dfrac{2x-1}{x^2}}$을 간단히 하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$$\sqrt{1+\frac{2x+1}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{2x-1}{x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2}} - \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2}}$$

$$= \frac{x+1}{x} + \frac{x-1}{x} = \frac{2x}{x} = 2$$

11. $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}}$ 을 간단히 하면?

① $\dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}}$ ② $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ ③ $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+1}}$

④ $2\sqrt{2x}$ ⑤ $2\sqrt{2x+1}$

해설

(주어진 식)

$$=\frac{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x})+(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x})}{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x})}$$

$$=\frac{2\sqrt{2x+1}}{(2x+1)-2x}$$

$$=2\sqrt{2x+1}$$

12. 무리수 $\sqrt{3-\sqrt{8}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $n < a-b < n+1$을 만족하는 n의 값을 구하여라. (단, n은 정수)

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$
정수 부분(a) : 0, 소수 부분(b) : $\sqrt{2}-1$
$n < 0-\sqrt{2}+1 < n+1$
$n-1 < -\sqrt{2} < n$
$n-1 < -1.414\cdots < n$
$\therefore\ n=-1$

13. $(1+\sqrt{2})x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, $(1-\sqrt{2})y=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 일 때, x^2+xy+y^2 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 33

해설

$(1+\sqrt{2})x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$

$\therefore\ x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=3-2\sqrt{2}$

$(1-\sqrt{2})y=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$

$\therefore\ y=\dfrac{\sqrt{2}+1}{-\sqrt{2}+1}=-3-2\sqrt{2}$

$\therefore\ x+y=-4\sqrt{2},\ xy=-1$

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$

$=(-4\sqrt{2})^2-(-1)=33$

14. 함수 $y = a\sqrt{x}$ 에 대하여 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고른 것은? (단, $a \neq 0$)

㉠ 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다.
㉡ $a > 0$ 이면 제 2 사분면을 지난다.
㉢ $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉡ $a > 0$ 이면 제 1 사분면을 지난다.
㉢ $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.
따라서 옳지 않은 것은 ㉡, ㉢ 이다.

15. $y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ 2π ⑤ 4π

해설

$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 에서
$1-(x+1)^2 \geq 0,\ x^2+2x \leq 0$
$\therefore -2 \leq x \leq 0$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x \mid -2 \leq x \leq 0\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$
$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 양변을
제곱하여 정리하면 $(x+1)^2+y^2=1$ 이므로
함수의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$

16. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, 함수 $f : X \to X$ 가 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) \le x$ 를 만족한다. 이 때, 함수 f 의 개수는?

① 16 개　② 20 개　③ 24 개　④ 28 개　⑤ 32 개

해설

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1 의 1 개　$\Leftarrow f(1) \le 1$
$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2 의 2 개　$\Leftarrow f(2) \le 2$
$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3 의 3개　$\Leftarrow f(3) \le 3$
$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3, 4 의 4개　$\Leftarrow f(4) \le 4$
따라서, 구하는 함수 f 의 개수는
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (개)

17. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 f를 $f : x \to a|x-1|+(2-a)x+a$ 와 같이 정의한다. 함수 f의 역함수가 존재할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$ ② $a > 1$ ③ $0 < a < 2$

④ $-\frac{1}{2} < a < 2$ ⑤ $0 < a < \frac{2}{3}$

해설

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$

$$= \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ (2-2a)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

가 일대일대응이려면 $x \geq 1$에서 증가함수이므로 $x < 1$에서도 증가함수 이어야 한다.

즉, $2 - 2a > 0$에서 $a < 1$

18. 역함수가 존재하는 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 4x + 1$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(9)$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$(g \cdot f)^{-1}(x) = (f^{-1} \cdot g^{-1})(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(9) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ g)(9) \\ &= (\mathrm{I} \circ \mathrm{I})(9) \\ &= 9\end{aligned}$$

19. 두 함수 $f(x)=2x-1$, $g(x)=-4x+5$ 에 대하여 $f\circ h=g$ 가 성립할 때, 함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(-5)$ 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$f\circ h=g$ 의 양변의 왼쪽에 f^{-1} 를 합성하면 $f^{-1}\circ(f\circ h)=f^{-1}\circ g$

$f^{-1}\circ(f\circ h)=\left(f^{-1}\circ f\right)\circ h=I\circ h=h$ (단, I 는 항등함수)

$\therefore h=f^{-1}\circ g$

한 편, $f(x)=2x-1$ 에서 $y=2x-1$ 로 놓고, x 에 대하여 풀면

$x=\frac{1}{2}(y+1)$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y=\frac{1}{2}(x+1)$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+1)$

$h(x)=\left(f^{-1}\circ g\right)(x)=f^{-1}(g(x))=f^{-1}(-4x+5)=\frac{1}{2}(-4x+5+1)=-2x+3$

$\therefore h(-5)=-2\cdot(-5)+3=13$

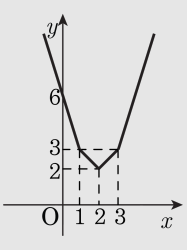
20. 함수 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 n 이라 할 때, 상수 m, n 의 곱 mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 에서
(i) $x \geq 3$ 일 때, $y = x-1+x-2+x-3 = 3x-6$
(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $y = x-1+x-2-(x-3) = x$
(iii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x-1-(x-2)-(x-3) = -x+4$
(iv) $x < 1$ 일 때, $y = -(x-1)-(x-2)-(x-3) = -3x+6$
따라서 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고



$x = 2$ 일 때 최솟값이 2이므로 $m = 2$, $n = 2$
$\therefore mn = 4$

21. 전 구간을 일정한 속도 60 km/h 로 달리도록 되어 있는 어느 고속도로에서 하행하던 고속버스가 5 분 동안에 상행하는 같은 회사 소속의 고속버스 20 대를 보았다. 이 고속버스의 배차 간격이 일정할 때, 100 km 의 상행선에는 약 몇 대의 고속버스가 달리고 있는가?

① 50 대 ② 100 대 ③ 120 대

④ 150 대 ⑤ 200 대

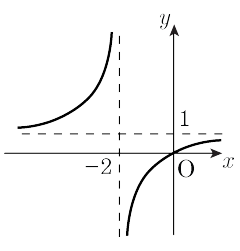
해설

각 방향으로 시속 60 km 로 달리고 있으므로 어느 한 방향에 대한 다른 방향의 상대 속도는 시속 120 km 이다.

이때, 5분 동안의 주행 거리는 $120\times\frac{5}{60}=120\times\frac{1}{12}=10(\text{km})$ 이고, 이 사이를 달리는 동안에 20 대의 버스를 보았으므로 100 km 의 구간에는 200 대가 있다.

22. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

$y=1+\dfrac{k}{x+2}$, $(k\neq 0)$가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=1+\dfrac{k}{0+2}$, $\quad k=-2$

따라서 $y=1+\dfrac{-2}{x+2}=\dfrac{x}{x+2}$

$\therefore\ \ a=1,\ b=0,\ c=2$

$\therefore\ \ a+b+c=3$

23. 다음 등식 $x=\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}+\cdots}}}}$ 을 만족하는 x 값을 간단히 한 것은?

① $\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$ ② $\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ ③ 1.5

④ $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{7}\right)$ ⑤ $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

해설

$$x=\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}+\cdots}}}}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}+x}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{3}{2}+x$$

$$\Rightarrow x^2-x-\frac{3}{2}=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$$

$$x=\frac{1+\sqrt{7}}{2}(\because x>0)$$

24. $x=\sqrt{17-12\sqrt{2}}$일 때, 다항식 $x^5-4x^4-7x^3-21x^2-x+2$의 값은?

① $4-2\sqrt{2}$　② $4+2\sqrt{2}$　③ $3-2\sqrt{2}$

④ $3+2\sqrt{2}$　⑤ $2-2\sqrt{2}$

해설

$x=\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{17-2\sqrt{72}}=3-2\sqrt{2}$이므로 $x-3=-2\sqrt{2}$

양변을 제곱하면, $(x-3)^2=8$

$\therefore\ x^2-6x+1=0$

주어진 식을 x^2-6x+1로 나누면

$x^5-4x^4-7x^3-21x^2-x+2$

$=(x^2-6x+1)(x^3+2x^2+4x+1)+x+1$

$=x+1$

$=(3-2\sqrt{2})+1$

$=4-2\sqrt{2}$

25. 다음 식의 분모를 0으로 하지 않는 모든 실수 x에 대하여 등식

$$\frac{4}{x^2-1}+\frac{8}{x^2-4}+\frac{12}{x^2-9}+\cdots+\frac{40}{x^2-100}$$
$$=k\left\{\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\cdots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right\}$$

이 항상 성립할 때, 상수 k의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $k=22$

해설

(주어진 식)

$$=2\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+2\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)$$
$$+\cdots+2\left(\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+10}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+9}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+1}\right)\right\}$$
$$=2\left\{\frac{11}{(x-1)(x+10)}+\frac{11}{(x-2)(x+9)}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{11}{(x-10)(x+1)}\right\}$$

$\therefore k=22$