

1. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \leq y \leq 10\}$ 에 대하여 $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

일차함수 $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$ 이고

$f(-1) = -a + b$, $f(4) = 4a + b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a + b \leq y \leq 4a + b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는

공역과 치역이 같아야 하므로

$-a + b = -5$, $4a + b = 10$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = -2$

$\therefore 2a + b = 4$

2. 집합 $X = \{-1, 1, 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x + k$ 가 일대일 대응일 때, 상수 k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(-1) = 1 + k$$

$$f(1) = -1 + k$$

$$f(3) = -3 + k$$

이때, 함수 f 가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.

$$\therefore X = \{1 + k, -1 + k, -3 + k\}$$

그런데 $-3 + k < -1 + k < 1 + k$ 이므로

$X = \{-1, 1, 3\}$ 에서

$$-3 + k = -1, \quad -1 + k = 1, \quad 1 + k = 3$$

$$\therefore k = 2$$

3. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1, 2, 3, k\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 7, a^4, a^2 + 3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x + 1$ 이 일대일 대응일 때, $a + k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x + 1$ 에서 $f(1) = 4, f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2 + 3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3 \times 3 + 1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2 + 3a, f(k) = a^4$

$f(3) = a^2 + 3a$ 에서 $a^2 + 3a = 10$

$a^2 + 3a - 10 = 0, (a - 2)(a + 5) = 0$

$\therefore a = 2$ ($\because a$ 는 자연수)

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k + 1$ 에서 $3k + 1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a + k = 2 + 5 = 7$

4. $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid -2 \leq y \leq 2\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b (a > 0)$ 로 정의되는 함수 f 가 일대일대응일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

- ① -2 ② 2 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ -1

해설

일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$f(-1) = -2 \quad f(2) = 2$$

$$\therefore -a + b = -2, \quad 2a + b = 2$$

$$\Rightarrow a = \frac{4}{3} \quad b = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = -2$$

5. $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid 0 \leq y \leq 3\}$ 일 때 함수 $f : X \rightarrow Y, y = ax + b (a < 0)$ 가 일대일 대응이 되는 상수 a, b 의 값의 합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = ax + b$ 는 $a < 0$ 이므로 감소함수이다.

$\therefore x = -1$ 일 때, $f(x)$ 는 최대이고

$$-a + b = 3$$

$x = 2$ 일 때 $f(x)$ 는 최소이며

$$2a + b = 0 \text{ 두 식을 연립하면 } a = -1, b = 2$$

$$\therefore a + b = 1$$

6. 함수 $f(x) = a|x| + (1-a)x$ 가 실수의 범위에서 일대일대응이 되도록 하는 상수 a 의 범위는 무엇인가?

① $a < -2$

② $a > 2$

③ $a < \frac{1}{2}$

④ $a > -\frac{1}{2}$

⑤ $a < 2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ (1-2a)x & (x < 0) \end{cases} \text{ 이고}$$

$x \geq 0$ 일 때 $f(x)$ 는 증가함수이므로

$x < 0$ 일 때도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 일대일대응이 된다. 따라서 $1-2a > 0$

$$\therefore a < \frac{1}{2}$$

7. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $Z = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 일대일 대응인 함수 $f : X \rightarrow Y$ 와 함수 $g : Y \rightarrow Z$ 가 $f(1) = a$, $g(c) = 6$, $(g \circ f)(2) = 4$ 를 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은 얼마인가?

- ① a
- ② b
- ③ c
- ④ b, c
- ⑤ a, b, c

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이므로
 $f(2) = b$ 또는 $f(2) = c$ 이어야 한다.
(i) $f(2) = b$ 인 경우 $f(1) = a$ 이므로 $f(3) = c$
(ii) $f(2) = c$ 인 경우 $g(c) = 6$ 이므로
 $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = 6$
그런데 문제의 조건에서
 $(g \circ f)(2) = 4$ 이므로 모순이다.
따라서, (i), (ii)에 의하여 $f(3) = c$ 이다.

해설

f 와 g 가 일대일대응이면
 $g \circ f$ 도 일대일대응이다.
 $(g \circ f)(2) = 4$ 에서
 $g(f(2)) = 4$ 이므로 $f(2) \neq c$
또, $f(1) = a$ 이고 f 가 일대일대응이므로
 $f(2) = b$ 이어야 한다.
 $\therefore f(3) = c$

8. 다음의 윗줄은 자연수, 아랫줄은 정수이다. 이 도식이 의미하는 뜻과 가장 가까운 것은?

자연수;...	6,	4,	2,	1,	3,	5,	7,	...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
정수;...	-3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3,	...

- ① 정수는 무한히 많다.
- ② 자연수는 무한히 많다.
- ③ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일함수가 존재할 수 없다.
- ④ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일대응이 존재한다.
- ⑤ 정수의 개수가 자연수의 개수보다 많다.

해설

문제의 대응은 자연수의 집합과 정수의 집합 사이에 서로 모자라는 것도 없고 남는 것도 없으며 2번씩 대응되는 것도 없는 대응, 즉 일대일 대응임을 알 수 있다.

9. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = ax + |x - 2| + 3$ 이 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$ 또는 $a > 0$

② $-1 \leq a \leq 1$

③ $-2 < a < 2$

④ $a < -1$ 또는 $a > 1$

⑤ $a \geq 1$

해설

(i) $x \geq 2$ 일 때 $f(x) = ax + x - 2 + 3 = (a + 1)x + 1$

(ii) $x < 2$ 일 때 $f(x) = ax - (x - 2) + 3 = (a - 1)x + 5$

함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면 항상 증가하거나 감소해야

하므로 (i), (ii)에서의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.

따라서, $(a + 1)(a - 1) > 0$ 이므로

$a < -1$ 또는 $a > 1$

10. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$f : x \rightarrow a|x-1| + (2-a)x + a \quad (x \in R, a \in R)$

함

수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

- ① $a < -1$
- ② $a \leq -1$
- ③ $a > -1$
- ④ $a < 1$
- ⑤ $a \leq 1$

해설

$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 에서 $x \geq 1, x < 1$ 인 경우로 나누면,
 $x \geq 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1) + (2-a)x + a$
 $x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x) + (2-a)x + a$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -2(a-1)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면
 $x \geq 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

즉, $-2(a-1) > 0, a-1 < 0$

$\therefore a < 1$