1. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \le y \le 10\}$ 에 대하여 $f : X \to Y$, $f(x) = ax+b\ (a > 0)$ 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

일차함수 $f(x) = ax+b\ (a > 0)$ 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$ 이고

$f(-1) = -a + b$, $f(4) = 4a + b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a + b \le y \le 4a + b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는

공역과 치역이 같아야 하므로

$-a + b = -5$, $4a + b = 10$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = -2$

$\therefore 2a + b = 4$

2. 집합 $X=\{-1,\ 1,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x)=-x+k$ 가 일대일 대응일 때, 상수 k 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(-1)=1+k$

$f(1)=-1+k$

$f(3)=-3+k$

이때, 함수 f 가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.

$\therefore X=\{1+k,\ -1+k,\ -3+k\}$

그런데 $-3+k<-1+k<1+k$ 이므로

$X=\{-1,\ 1,\ 3\}$ 에서

$-3+k=-1,\ -1+k=1,\ 1+k=3$

$\therefore k=2$

3. 자연수 $a,\ k$ 에 대하여 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ k\}$ 에서 집합 $Y = \{4,\ 7,\ a^4,\ a^2+3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x+1$ 이 일대일 대응일 때, $a+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x+1$ 에서 $f(1) = 4,\ f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2+3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3\times 3+1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2+3a,\ f(k) = a^4$

$f(3) = a^2+3a$ 에서 $a^2+3a = 10$

$a^2+3a-10 = 0,\quad (a-2)(a+5) = 0$

$\therefore a = 2(\because a$는 자연수$)$

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k+1$ 에서 $3k+1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a+k = 2+5 = 7$

4. $X=\{x\mid -1\le x\le 2\}$, $Y=\{y\mid -2\le y\le 2\}$ 에서 $f:X\to Y$, $f(x)=ax+b(a>0)$ 로 정의되는 함수 f 가 일대일대응일 때, $\dfrac{a}{b}$ 의 값은?

① -2 ② 2 ③ $-\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ -1

해설

일대일 대응이고 $a>0$ 이므로

$f(-1)=-2 \quad f(2)=2$

$\therefore\ -a+b=-2, \quad 2a+b=2$

$\Rightarrow\ a=\dfrac{4}{3} \quad b=-\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow\ \dfrac{a}{b}=-2$

5. $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid 0 \leq y \leq 3\}$ 일 때 함수$f : X \to Y, y = ax + b(a < 0)$ 가 일대일 대응이 되는상수 a, b 의 값의 합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = ax + b$ 는 $a < 0$ 이므로 감소함수이다.
$\therefore\ x = -1$ 일 때, $f(x)$ 는 최대이고
$-a + b = 3$
$x = 2$ 일 때 $f(x)$ 는 최소이며
$2a + b = 0$ 두 식을 연립하면 $a = -1, b = 2$
$\therefore\ a + b = 1$

6. 함수 $f(x) = a|x| + (1-a)x$가 실수의 범위에서 일대일대응이 되도록 하는 상수 a의 범위는 무엇인가?

① $a < -2$ ② $a > 2$ ③ $a < \frac{1}{2}$

④ $a > -\frac{1}{2}$ ⑤ $a < 2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ (1-2a)x & (x < 0) \end{cases}$$ 이고

$x \geq 0$ 일 때 $f(x)$는 증가함수이므로

$x < 0$일 때도 $f(x)$는 증가함수이어야 일대일대응이 된다. 따라서 $1 - 2a > 0$

$\therefore\ a < \frac{1}{2}$

7. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $Z = \{4, 5, 6\}$에 대하여 일대일대응인 함수 $f : X \to Y$와 함수 $g : Y \to Z$가 $f(1) = a$, $g(c) = 6$, $(g \circ f)(2) = 4$를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은 얼마인가?

① a ② b ③ c

④ b, c ⑤ a, b, c

해설

$f(x)$가 일대일대응이므로
$f(2) = b$ 또는 $f(2) = c$이어야 한다.
(i) $f(2) = b$인 경우 $f(1) = a$이므로 $f(3) = c$
(ii) $f(2) = c$인 경우 $g(c) = 6$이므로
$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = 6$
그런데 문제의 조건에서
$(g \circ f)(2) = 4$이므로 모순이다.
따라서, (i), (ii)에 의하여 $f(3) = c$이다.

해설

f와 g가 일대일대응이면
$g \circ f$도 일대일대응이다.
$(g \circ f)(2) = 4$에서
$g(f(2)) = 4$이므로 $f(2) \neq c$
또, $f(1) = a$이고 f가 일대일대응이므로
$f(2) = b$이어야 한다.
$\therefore f(3) = c$

8. 다음의 윗줄은 자연수, 아랫줄은 정수이다. 이 도식이 의미하는 뜻과 가장 가까운 것은?

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{자연수;}\cdots, & 6, & 4, & 2, & 1, & 3, & 5, & 7.\ \cdots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\text{정수;}\cdots, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3,\ \cdots
\end{array}
$$

① 정수는 무한히 많다.

② 자연수는 무한히 많다.

③ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일함수가 존재할 수 없다.

④ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일대응이 존재한다.

⑤ 정수의 개수가 자연수의 개수보다 많다.

해설

문제의 대응은 자연수의 집합과
정수의 집합 사이에 서로 모자라는 것도 없고
남는 것도 없으며 2번씩 대응되는 것도 없는 대응,
즉 일대일 대응임을 알 수 있다.

9. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = ax + |x - 2| + 3$ 이 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$ 또는$a > 0$

② $-1 \le a \le 1$

③ $-2 < a < 2$

④ $a < -1$ 또는 $a > 1$

⑤ $a \ge 1$

해설

(i) $x \ge 2$ 일 때$f(x) = ax + x - 2 + 3 = (a+1)x + 1$
(ii) $x < 2$ 일 때$f(x) = ax - (x-2) + 3 = (a-1)x + 5$
함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면 항상 증가하거나 감소해야 하므로 (i), (ii) 에서의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.
따라서, $(a+1)(a-1) > 0$ 이므로
$a < -1$ 또는 $a > 1$

10. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$f : x \ \rightarrow \ a\,|\,x-1\,|+(2-a)x+a \ (x \in R,\ a \in R)$

함수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$ ② $a \leq -1$ ③ $a > -1$

④ $a < 1$ ⑤ $a \leq 1$

해설

$f(x) = a|x-1|+(2-a)x+a$ 에서 $x \geq 1,\ x < 1$ 인 경우로 나누면,

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1)+(2-a)x+a$

$x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x)+(2-a)x+a$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -2(a-1)x+2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면

$x \geq 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

즉, $-2(a-1) > 0,\ a-1 < 0$

$\therefore\ a < 1$