1. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$
\begin{aligned}
2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\
&= (2a + 4b) + (2a + 3b) \quad \text{㉠ 분배법칙} \\
&= 2a + (4b + 2a) + 3b \quad \text{㉡ 결합법칙} \\
&= 2a + (2a + 4b) + 3b \quad \text{㉢ 교환법칙} \\
&= (2a + 2a) + (4b + 3b) \quad \text{㉣ 교환법칙} \\
&= (2 + 2)a + (4 + 3)b \quad \text{㉤ 분배법칙} \\
&= 4a + 7b
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

2. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$ 일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$
$=xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$
$=7$

3. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$의 x^3의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4^3-5^3　　② 3^3-3^4　　③ 0

④ 1　　⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3=A$라 놓으면

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$

$=(A+x^4)^3$

$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$

$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$은 x^3항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

4. 모든 모서리의 합이 36, 겉넓이가 56 인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 $a,\ b,\ c$ 라 하자.

$4(a+b+c)=36,\ 2(ab+bc+ca)=56$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2=81-56=25$

$\therefore$ (대각선의 길이) $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{25}=5$

5. 등식 $(x+1)(x-1)(x^3-x^2+x-1) = x^5-x^4+ax-b$가 항상 성립하도록 a, b값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

양변에 $x=1$을 대입하면, $0 = a-b \cdots$ ㉠
양변에 $x=-1$을 대입하면, $0 = -2-a-b \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 에서 $a=b=-1$
$\therefore\ a+b=-2$

6. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때의 나머지는 3이고, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 1이다. 이 다항식을 $(x-1)(x-2)$로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$라고 할 때, $a+b$를 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$f(1)=a+b=3,\ f(2)=2a+b=1$

$a=-2,\ b=5$

$\therefore\ a+b=3$

7. 다항식 $f(x)$, $g(x)$에서 $f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지가 2이고 $g(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지가 $2x+1$이다. $2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는?

① 13 ② -13 ③ 16 ④ -16 ⑤ 26

해설

$f(x)=(x^2-1)Q_1(x)+2$,
$\therefore\ f(1)=2$
$g(x)=(x^2-3x+2)Q_2(x)+2x+1$,
$\therefore\ g(1)=3$
$2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는
$2f(1)+3g(1)=2\cdot 2+3\cdot 3=13$

8. x^3-4x^2+5x-3 을 $A(x-3)^3+B(x-3)^2+C(x-3)+D$ 로 나타낼 때, $ABCD$ 의 값을 구하면?

① -20 ② 40 ③ -60 ④ 120 ⑤ -120

해설

x^3-4x^2+5x-3 을 $x-3$ 에 대해 내림차순으로 정리하기 위해 $x-3$ 으로 반복하여 나누면 나머지가 차례로 D, C, B, A 가 되므로

3	1	−4	5	−3		
		3	−3	6		
3	1	−1	2	3	←	d
		3	6			
3	1	2	8	←	c	
		3				
	1	5	← b			
	↑					
	a					

$\therefore\ ABCD=1\times5\times8\times3=120$

9. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

10. x^6+1을 계수가 실수인 범위 내에서 인수분해 할 때, 다음 중 인수인 것은?

① x^2+x+1　② x^2-x+1　③ $x^2+\sqrt{3}x+1$
④ $x^2+\sqrt{3}x-1$　⑤ x^2-1

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2)^3+1\\ &= (x^2+1)(x^4-x^2+1)\\ &= (x^2+1)\{(x^2+1)^2-3x^2\}\\ &= (x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)\end{aligned}$$

11. 다음 중 $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$의 인수가 아닌 것은?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-3$ ④ $x+3$ ⑤ $x+2$

해설

준식을 인수정리와 조립제법을 이용하여 정리하면
$(x-1)(x-3)(x+2)(x+3)=0$
※ 최고차항의 계수가 1 인 다항식에서 인수정리를 사용할 때, 상수항의 약수 중에서 대입하여 0이 되는 정수를 찾아본다.

12. 두 다항식 A, B에 대하여 $A \otimes B$를 $A \otimes B = \dfrac{B}{B-A}$ 라 할 때, $(x \otimes x^2) + (x^2 - x) \otimes (x-1)$을 간단히 하면? (단, $x \neq 0$, $x \neq 1$인 실수)

① -1　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$$(x \otimes x^2) = \frac{x^2}{x^2 - x} = \frac{x^2}{x(x-1)} = \frac{x}{x-1}$$

$$\begin{aligned}(x^2 - x) \otimes (x-1) &= \frac{x-1}{(x-1)-(x^2-x)} \\ &= \frac{x-1}{x-1-x^2+x} \\ &= \frac{(x-1)}{-(x^2-2x+1)} \\ &= \frac{(x-1)}{-(x-1)^2} \\ &= -\frac{1}{x-1}\end{aligned}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{(x-1)} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

13. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형　　② 이등변삼각형

③ 정삼각형　　④ 직각이등변삼각형

⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 에서 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)=0$

$\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$ 이고,

$a,\ b,\ c$ 는 실수이므로, $a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

14. $x+y+2z=1$, $2x-y+z=5$를 만족하는 모든 실수 x, y, z에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=6$이 성립할 때, $3a+2b+c$의 값은 얼마인가?

① 12 ② 8 ③ 4 ④ 0 ⑤ −2

해설

$x+y+2z=1 \cdots$①

$2x-y+z=5 \cdots$②

① + ②: $x+z=2 \Rightarrow z=2-x$

② ×2−① : $x-y=3 \Rightarrow y=x-3$

$\therefore ax^2+by^2+cz^2=6$

$\Rightarrow ax^2+b(x-3)^2+c(2-x)^2$

$=(a+b+c)x^2-(4c+6b)x+9b+4c=6$

모든 실수 x, y, z에 대해 성립하려면

$a+b+c=0,\ 4c+6b=0,\ 9b+4c=6$

위의 식을 연립하여 풀면, $a=1,\ b=2,\ c=-3$

$\therefore\ 3a+2b+c=4$

15. 다항식 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누면 $3x+2$가 남고, 그 몫을 $x-1$로 나누면 2가 남는다. 이 다항식 $f(x)$를 x^3-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $\frac{1}{2}R(2)$의 값을 구하면?

① 41　② 31　③ 21　④ 11　⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x+1)Q(x)+3x+2 \\ &= (x^2+x+1)\{(x-1)p(x)+2\}+3x+2 \\ &= (x^3-1)p(x)+2x^2+5x+4 \end{aligned}$$

$\therefore R(x) = 2x^2+5x+4$

$\therefore \frac{1}{2}R(2) = 11$

16. 이차식 $f(x)$를 각각 $x-3, x+1$로 나눈 나머지는 같고, $f(1)=0$일 때, $\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{n}{m}$ ($m,\ n$은 서로소)이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ f(x)=(x-1)(ax+b)$

$f(3)=f(-1)$ 이므로 $2(3a+b)=-2(-a+b)$

$\therefore\ a=-b$

$\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)}=\frac{-9b}{-25b}=\frac{9}{25}$

$\therefore\ m=25,\ n=9$

17. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

18. 인수분해 공식 $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ 을 이용하여 $\frac{9999^3+1}{9998\times 9999+1}$ 을 계산하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10000

해설

$9999=a$ 라 하면

$$\frac{9999^3+1}{9998\times 9999+1} = \frac{a^3+1}{(a-1)a+1}$$
$$= \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$= a+1 = 10000$$

19. $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$가 다음 조건을 만족할 때, $ab - c + d$의 값은?

㉠ $f(x)$, $g(x)$의 최소공배수는 $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$이다.
㉡ $f(1) = -4$, $g(0) = 5$

① -31 ② -11 ③ 5 ④ 13 ⑤ 29

해설

두 다항식의 최소공배수
$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x+1)(x+5)(x-3)$에서
인수들 중 적당한 두 인수들로 $f(1) = -4$,
$g(0) = 5$이 되도록 $f(x), g(x)$를 만들면
$f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$
$g(x) = (x+1)(x+5) = x^2 + 6x + 5$
$a = -2, b = -3, c = 6, d = 5$
$\therefore\ ab - c + d = 5$

20. 두 다항식 $x^2+ax+bc$ 와 $x^2+bx+ca$가 일차의 최대공약수를 가질 때, 최소공배수를 구하면?

① $(x-a)(x-b)(x-c)$
② $(a-x)(b-x)(c-x)$
③ $(x-a)^2(x-b)(x-c)$
④ $(x-a)(x-b)^2(x-c)$
⑤ $(x-a)(x-b)(x-c)^2$

해설

일차의 최대공약수를 $x-p$라 하면
$p^2+ap+bc=0 \cdots$ ㉠
$p^2+bp+ca=0 \cdots$ ㉡
㉠−㉡에서 $(a-b)p-c(a-b)=(a-b)(p-c)=0$
일차의 최대공약수를 가지므로
$a \neq b,\ p=c$이고 최대공약수는 $x-c$
상수항을 기준으로 인수분해하면 각각
$x^2+ax+bc=(x-c)(x-b)$
$x^2+bx+ca=(x-c)(x-a)$
$\therefore$ 최소공배수는 $(x-a)(x-b)(x-c)$