1. 연립부등식 $\frac{x-1}{3} < x+3 \leq 0.1(x+3)$ 을 만족하는 정수 x 의 개수는?

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

i) $\frac{x-1}{3} < x+3, \quad x > -5$

ii) $x+3 \leq 0.1(x+3), \quad x \leq -3$

i), ii) 에 의하여 공통된 해의 범위는 $-5 < x \leq -3$ 이므로 만족하는 정수는 $-4, -3$ 의 2 개이다.

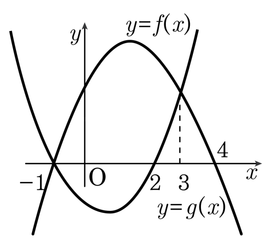
2. 이차부등식 $(k+1)x^2 - kx + 1 < 0$을 만족하는 실수 x가 존재하지 않도록 하는 정수 k의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

$f(x) = (k+1)x^2 - kx + 1$
$f(x) < 0$을 만족하는 실수 x가 존재하지 않으면
모든 x에 대해 $f(x) \geq 0$
$(k+1)x^2 - kx + 1 \geq 0$
i) $k+1 > 0$에서 $k > -1$
ii) $D = k^2 - 4(k+1) \leq 0$
$k^2 - 4k - 4 \leq 0$
$2 - 2\sqrt{2} \leq k \leq 2 + 2\sqrt{2}$
i), ii) 의 공통범위는 $2 - 2\sqrt{2} \leq k \leq 2 + 2\sqrt{2}$
정수 k : 0, 1, 2, 3, 4 (5개)

3. 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) - g(x) \le 0$ 의 해를 구하면?



① $x \le -1$　　② $-1 \le x \le 2$

③ $-1 \le x \le 3$　　④ $2 \le x \le 3$

⑤ $2 \le x \le 4$

해설

$f(x) - g(x) \le 0$ 에서 $f(x) \le g(x)$ 이 부등식을 만족하는 x 의 값의 범위는 $y = f(x)$ 의 그래프가 $y = g(x)$ 의 그래프와 같거나 아래쪽에 있는 부분이므로 $-1 \le x \le 3$

4. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1$, $a < 2$

ii) $f(1) > 0$, $1 - a + 9 > 0$, $a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$D = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0$, $a \ge 6$, $a \le -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

5. 두 점 $\mathrm{A}(4,3)$, $\mathrm{B}(1,1)$ 이 있을 때, x축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

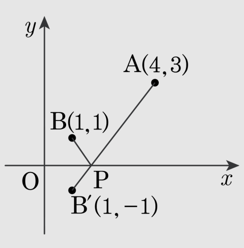
해설

B를 x축에 대해 대칭이동한 점을 B' 라 하면

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'A}}$ 일 때 최소가 된다.

$\therefore\ \sqrt{(1-4)^2+(-1-3)^2}=5$



6. 수직선 위의 두 점 A(-4), B(12) 에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $5:3$ 으로 내분하는 점을 P, $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $7:11$ 로 외분하는 점을 Q 라고 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점의 좌표는?

① -32　② -13　③ 6　④ 13　⑤ 32

해설

P(a), Q(b) 라고 하면,

$\mathrm{P} = \dfrac{5\times 12 + 3\times(-4)}{5+3} = 6,$

$\mathrm{Q} = \dfrac{7\times 12 - 11\times(-4)}{7-11} = -32$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점은 $\dfrac{-32+6}{2} = -13$

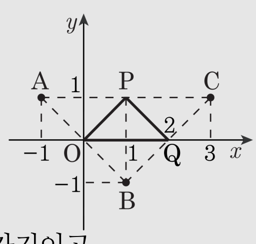
7. 좌표평면 위의 네 점 (0, 0), (2, 0), (1, 1), (a, b)를 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 될 때, 다음 중 (a, b)가 될 수 있는 좌표의 개수는?

(1, −1), (−1, 1), (−1, −1), (3, 1), (0, 2)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

그림과 같이 점 O, P, Q를 지나면서
$\overline{PQ}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OP}$에
각각 평행인 직선들의 교점을 A, B, C
라고 할 때,



□AOQP, □BQPO, □CPOQ는 모두 평행사변형이 된다.
따라서 구하는 점 (a, b)는 A, B, C 세 가지이고
A(−1, 1), B(1, −1), C(3, 1) 이다.

8. 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 $\mathrm{G}(2,\ -1)$ 이고 세 변 AB, BC, CA 를 $2\ :1$ 로 내분하는 점이 각각 $\mathrm{P}(a, 3)$, $\mathrm{Q}(-2, -2)$, $\mathrm{R}(5, b)$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

삼각형 ABC 의 무게중심과 삼각형 PQR 의 무게중심은 일치한다.
삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는
$\left(\dfrac{a-2+5}{3}, \dfrac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로
$\dfrac{a+3}{3}=2$ 에서 $a=3$
또 $\dfrac{1+b}{3}=-1$ 에서 $b=-4$
$\therefore\ a+b=-1$

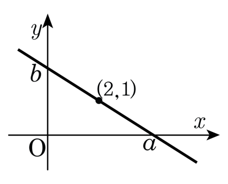
9. 점 (0, 2) 를 지나고 x 축의 양의 방향과 이루는 각이 $30°$ 인 직선의 방정식은?

① $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$ ② $y=x+2$ ③ $y=2x+2$
④ $y=x+3$ ⑤ $y=x+4$

해설

기울기 $m=\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이고
점 (0, 2) 를 지나므로,
$y-2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-0)$
$\therefore\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$

10. 다음 그림에서 a와 b사이의 관계식을 나타내면?



① $a+\frac{a}{2}=1$ ② $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$
③ $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$ ④ $\frac{2}{a}+b=1$
⑤ $\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}=1$

해설

x 절편이 a, y 절편이 b 인 직선의 방정식은
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이다.
따라서 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$ 이다.

11. A $(1, 1)$, B $(-2, -3)$, C $(k, k+1)$이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
$\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기가 일치해야 한다.

$\therefore \quad \dfrac{-3-1}{-2-1} = \dfrac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$

$\Rightarrow \quad \therefore\ k = 4$

12. 다음은 직선 $x + ay + b = 0$이 제 1, 3, 4사분면을 지날 때, ab의 부호를 조사하는 과정이다.

> $a = 0$이면 주어진 직선이 제 1, 3, 4사분면을 지날 수 없으므로 $a \neq 0$이다.
> 이 때, 직선 $y = -\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$에서
> (기울기) (ㄱ) 0
> (y 절편) (ㄴ) 0
> a (ㄷ) 0
> b (ㄹ) 0 이므로 따라서 ab (ㅁ) 0

위의 (ㄱ) ~(ㅁ) 의 부호가 옳지 <u>않은</u> 것은?

① (ㄱ): $>$ ② (ㄴ) : $<$ ③ (ㄷ) : $<$
④ (ㄹ) : $<$ ⑤ (ㅁ) : $<$

해설

직선 $y = -\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ 의 그래프가
제 1, 3, 4 사분면을 지나려면
기울기는 양수, y 절편은 음수이어야 한다.

(기울기)$= -\frac{1}{a} > 0$

(y 절편)$= -\frac{b}{a} < 0$

$a < 0,\ b < 0$이므로 $ab > 0$

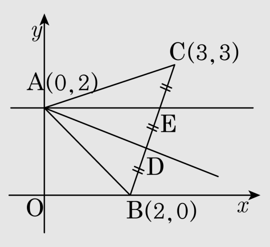
13. 점 $A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(3,3)$ 으로 이루어진 삼각형ABC 가 있다. $\triangle ABC$ 가 직선 $(k+1)x+(k-1)y=2(k-1)$ 에 의해 두 개의 도형으로 나누어지며, 한 쪽의 넓이가 다른 쪽 넓이의 두 배가 될 때의 k 값을 구하여라. (단, k 는 정수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$k(x+y-2)+x-y+2=0$ 은 k 에 관계없이
$A(0,2)$ 를 지나는 직선이므로
$\triangle ABC$ 를 그림과 같이
2 개의 삼각형으로 나누게 된다



따라서 $\overline{BC}$ 를 $1:2$ 또는 $2:1$ 로 내분하는
점D, E 를 지나게 된다.

$D\left(\frac{7}{3},1\right)$, $E\left(\frac{8}{3},2\right)$ 이므로

(i) D 를 지날 때,

$k\left(\frac{7}{3}+1-2\right)+\frac{7}{3}-1+2=0$

$k=-\frac{5}{2}$ 이므로 부적합 ($\because$ k 는 정수)

(ii) E 를 지날 때,

$k\left(\frac{8}{3}+2-2\right)+\frac{8}{3}-2+2=0$

$\therefore\ k=-1$

14. 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 서로 수직일 때 직선 $aa'x+bb'y+cc'=0$의 기울기는? (단, $aa'bb' \neq 0$)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ -2 ④ -1 ⑤ 2

해설

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의

기울기는 $-\frac{a}{b}$

$a'x+b'y+c'=0$에서 $y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$의

기울기는 $-\frac{a'}{b'}$

두 직선이 서로 수직이므로

$(-\frac{a}{b}) \cdot (-\frac{a'}{b'})=-1 \quad \therefore \frac{aa'}{bb'}=-1$

따라서 $aa'x+bb'y+cc'=0$ 에서

$y=-\frac{aa'}{bb'}x-\frac{cc'}{bb'}$의 기울기는

$\therefore \ -\frac{aa'}{bb'}=1$이다.

15. 세 직선 $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x+y=k \\ kx-5y=5 \end{cases}$ 이 한점 P$(a,\ b)$ 에서 만날 때 $a+b$ 의 최댓값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$3x+y=7 \ \cdots$ ㉠
$2x+y=k \ \cdots$ ㉡
$kx-5y=5 \cdots$ ㉢

㉠과 ㉡의 교점은 $(7-k,\ -14+3k)$ 이므로
이를 ㉢에 대입하면,
$k^2+8k-65=0 \quad \therefore\ k=5$ 또는 -13
$\therefore$ P$(a,\ b)=(2,\ 1)$ 또는 $(20,\ -53)$
$\therefore\ a+b$ 의 최댓값은 $2+1=3$

16. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x+5y < 5 \\ -2 < 2x+7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진 순서쌍 $(x,\ y)$ 중 $x+y$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $M+2m$의 값을 구하면?

① -9　② -13　③ -18　④ -22　⑤ -26

해설

$1 < x+5y < 5 \cdots\cdots$ ㉠
$-2 < 2x+7y < 3 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ $\times(-2)+$ ㉡을 하면
$-10 < -2x-10y < -2 \cdots\cdots$ ㉢
$-2 < 2x+7y < 3 \cdots\cdots$ ㉣
㉢ $+$ ㉣ $= -12 < -3 < 1$
그러므로, $-\frac{1}{3} < y < 4$
그런데, y는 정수이므로 $y = 0,\ 1,\ 2,\ 3$
이것을 ㉠, ㉡에 대입하여 적합한 x의 값을 구하면
$(x,\ y) = (-3,\ 1),\ (-6,\ 2),\ (-7,\ 2),\ (-11,\ 3)$
따라서, $x+y$의 최댓값은 $-3+1=-2$이고,
최솟값은 $-11+3=-8$이다.
$\therefore M=-2,\ m=-8\ \ \therefore\ M+2m=-18$

17. 연립부등식 $A : 5(x+2) \leq 26+x$, $B : 1-x < 3(2x+1)$, $C : 3x-5 < -(x+1)$ 에 대하여 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{2}{7} < x < 1$

해설

$A : 5(x+2) \leq 26+x \Rightarrow x \leq 4$

$B : 1-x < 3(2x+1) \Rightarrow x > -\frac{2}{7}$

$C : 3x-5 < -(x+1) \Rightarrow x < 1$

$\therefore -\frac{2}{7} < x < 1$

18. 일의 자리 숫자가 십의 자리 숫자보다 5 만큼 큰 두 자리 자연수가 있다. 이 자연수가 27 보다 크고 38 이하라고 한다. 두 자리 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 38

해설

십의 자리 숫자를 a 라 하면 일의 자리 숫자는 $a+5$ 이다.
즉 두 자리 자연수는 $10a+(a+5)=11a+5$ 이다.

$$27 < 11a+5 \le 38$$

$$22 < 11a \le 33$$

$$2 < a \le 3$$

a 는 자연수이므로 3 이다. 따라서 두 자리 자연수는 38 이다.

19. 15% 의 설탕물 300 g 이 있다. 여기에서 200 g 의 설탕물을 버리고 물 x g 을 넣어 10% 이상 12% 이하의 농도를 만들려고 할 때, x가 될 수 없는 것은?

① 25　② 32　③ 39　④ 47　⑤ 52

해설

설탕물을 200 g 버려도 물과 설탕을 함께 버린 것 이므로, 농도에는 변화가 없다.
따라서 설탕물을 버린 후 남은 설탕물은 똑같은 15% 의 설탕물 100 g 이다.
이 때의 소금물의 양은 $\frac{15}{100} \times 100 = 15(\mathrm{g})$ 이다.
여기에 물 x g 을 넣어줄 때의 농도를 식으로 나타내면 $\frac{15}{100+x} \times 100$ 이다.
농도가 10% 이상 12% 이하가 되게 해야 하므로, $10 \le \frac{15}{100+x} \times 100 \le 12$ 이다.
이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 10 \le \dfrac{15}{100+x} \times 100 \\ \dfrac{15}{100+x} \times 100 \le 12 \end{cases}$$

이고, 정리하면

$$\begin{cases} x \le 50 \\ x \ge 25 \end{cases}$$

이다. 따라서 $25 \le x \le 50$ 이다.

20. x보다 작거나 같은 정수 중에서 최대의 정수를 $[x]$, x보다 크거나 같은 정수 중에서 최소의 정수를 (x)로 나타낼 때, 방정식 $[x]+(x)=7$을 만족하는 x의 값을 모두 구하면?

① $\frac{7}{2}$　② $3 \leq x \leq 4$　③ $3 \leq x < 4$
④ $3 < x \leq 4$　⑤ $3 < x < 4$

해설

$$[x] = \begin{cases} k \ (x\text{가 정수 } k\text{일 때}) \\ k \ (k < x < k+1\text{일 때}) \end{cases}$$

$$(x) = \begin{cases} k \quad (x\text{가 정수 } k\text{일 때}) \\ k+1 \ (k < x < k+1\text{일 때}) \end{cases}$$

따라서, $[x]+(x)=7$ 이고
$[x]$, (x) 는 정수이므로
$[x]=3$, $(x)=4$ ($\because$ $[x] \leq (x)$)
$\therefore$ $3 < x < 4$

21. 부등식 $ax^2 + bx + a^2 > 2$ (a, b 는 실수) 의 해가 $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ 일 때, $2a - b$ 의 값을 구하면?

① -5　　② -6　　③ -7　　④ -8　　⑤ -9

해설

$ax^2 + bx + a^2 - 2 > 0 \cdots\cdots$ ㉠
해가 $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ 인 이차부등식은
$\left\{x - (1 - \sqrt{2})\right\}\left\{x - (1 + \sqrt{2})\right\} < 0$
즉, $x^2 - 2x - 1 < 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 부등호의 방향이 같으려면
$a < 0$ 이어야 한다.
㉡의 양변에 a 를 곱하면 $ax^2 - 2ax - a > 0$
㉠과 일치하여야 하므로
$b = -2a,\ a^2 - 2 = -a$
$a^2 - 2 = -a$ 에서 $(a - 1)(a + 2) = 0$
그런데, $a < 0$ 이므로 $a = -2,\ b = 4$
$\therefore\ 2a - b = -8$

22. 부등식 $\left|\dfrac{(1-a)x}{x^2+1}\right| < 1$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, a의 범위를 구하면?

① $0 < a \le 3$
② $a < -1$ 또는 $a > 3$
③ $-1 < a < 3$
④ $-1 \le a \le 3$
⑤ $-3 < a < 1$

해설

$-1 < \dfrac{(1-a)x}{x^2+1} < 1$

$\Rightarrow$ i) $-x^2-1 < (1-a)x$,

ii) $(1-a)x < x^2+1$

$\Rightarrow$ i) $x^2+(1-a)x+1 > 0$,

ii) $x^2+(a-1)x+1 > 0$

둘 모두 판별식이 0보다 작아야 한다.

$D = (1-a)^2 - 4 < 0$

$D = (a-1)^2 - 4 < 0$

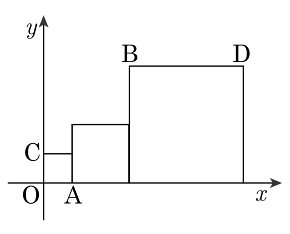
$\Rightarrow \quad (a-3)(a+1) < 0$

$\Rightarrow \quad -1 < a < 3$

$-1 < a < 3$

$\therefore \quad -1 < a < 3$

23. 좌표평면 위에 다음의 그림과 같이 세 개의 정사각형이 있다. 점 $C(0, 4)$, 점 $D(21, 12)$일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?



① 11　② 13　③ 15
④ 17　⑤ 21

해설

가장 작은 정사각형의 한 변의 길이가 4 이므로
점 $A(4,\ 0)$ 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이가 12 이므로
점 $B(21-12,\ 12)$
즉, $B(9,\ 12)$
$\therefore\ \overline{AB} = \sqrt{(9-4)^2 + 12^2} = 13$

24. $\triangle ABC$의 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$, $\overline{BC}=10$이면 $\overline{AM}$의 길이는?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ 이므로
$\triangle ABC$ 는 직각삼각형이다.
그리고 빗변인 $\overline{BC}$의 중점인 M은 직각삼각형의 외심이다.
$\therefore\ \overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=5$

25. 동일한 국제전화를 사용하는 두 개의 무역회사 A, B 가 있다. 국제전화의 요금제는 다음과 같다.
골드 요금제 : 기본요금 70000 원 , 1 분당 250 원
프리미엄 요금제 : 기본요금 40000 원, 1 분당 400 원
위 두 회사는 두 요금제 중 경제적으로 유리한 요금제를 선택하여 사용 중에 있고 이에 따라 A 사는 프리미엄 요금제를 이용 중이고 B 사는 골드 요금제를 이용 중이다. 이번 달 두 회사가 사용한 국제전화 통화 시간은 합해서 총 6 시간 40 분이라고 할 때, A 사는 국제전화를 최대 몇 분 이용했는지 구하여라.(단, 두 요금제 모두 분 단위 요금이다.)

▶ 답 : 분

▷ 정답 : 199 분

해설

6 시간 40 분은 총 400 분이고 A 사의 국제전화 이용시간을 x 분이라 하면 B 사의 이용시간은 $(400 - x)$ 분이다.
(1) A 사의 이용시간과 이용요금제를 통한 비교
(골드요금제)$= 70000 + 250x$
(프리미엄요금제)$= 40000 + 400x$
A 사는 프리미엄요금제를 이용 중이므로
$70000 + 250x > 40000 + 400x$
$\therefore\ x < 200$
(2) B 사의 이용시간과 이용요금제를 통한 비교
(골드요금제)$= 70000 + 250 \times (400 - x)$
(프리미엄요금제)$= 40000 + 400 \times (400 - x)$
B 사는 골드요금제를 이용중이므로
$170000 - 250x < 200000 - 400x$
$\therefore\ x < 200$
따라서 A 사는 국제전화를 최대 199 분 이용하였다.