

1. $\frac{2^1 + 2^0 + 2^{-1}}{2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}}$ 를 풀면?

- ① 6 ② 8 ③ $\frac{31}{2}$ ④ 24 ⑤ 512

해설

분자, 분모에 2^3 을 곱하면

$$\frac{2^3(2^1 + 2^0 + 2^{-1})}{2^3(2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4})} = \frac{2^3(2^1 + 2^0 + 2^{-1})}{2^1 + 2^0 + 2^{-1}} \\ = 2^3 = 8$$

해설

$$\frac{2 + 1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{16}} = 8$$

2. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \dots \textcircled{1}$$

①에서 분자를 x 에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned} & x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x) \\ &= (z-y)x^2 - (z^2 - y^2)x + yz^2 - y^2z \\ &= (z-y)x^2 - (z+y)(z-y)x + zy(z-y) \\ &= (z-y)\{x^2 - (z+y)x + zy\} \\ &= (z-y)(x-z)(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x) \\ \therefore (\text{준식}) &= \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1 \end{aligned}$$

3. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} - \frac{4}{1+x^4}$$

- ① $\frac{8x^4}{1-x^4}$ ② $\frac{8}{1-x^4}$ ③ $\frac{8x^4}{1-x^8}$
④ $\frac{8}{1-x^8}$ ⑤ $\frac{8x^4}{1+x^8}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} - \frac{4}{1+x^4} \\ &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} - \frac{4}{1+x^4} \\ &= \frac{4}{1-x^4} - \frac{4}{1+x^4} = \frac{8x^4}{1-x^8} \end{aligned}$$

4. $x = \frac{a}{b}$, $a \neq b$, $b \neq 0$ 일 때, $\frac{a+b}{a-b}$ 는?

- ① $\frac{x}{x+1}$ ② $\frac{x+1}{x-1}$ ③ 1 ④ $x - \frac{1}{x}$ ⑤ $x + \frac{1}{x}$

해설

$$a = bx \text{ 이므로 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{bx+b}{bx-b} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{또는 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

5. $\frac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1}$ 가 x 에 관한 항등식이 되도록 실수 a, b, c 의 값을 정하였을 때, abc 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 6 ④ 12 ⑤ 24

해설

$$\frac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $(x-1)^2(x+1)$ 을 곱하면

$$4x^2 = a(x-1)(x+1) + b(x+1) + c(x-1)^2 \cdots \textcircled{2}$$

②가 x 에 관한 항등식이므로

$x = 1, -1, 0$ 을 각각 대입하면

$4 = 2b, 4 = 4c, 0 = -a + b + c$

$\therefore a = 3, b = 2, c = 1$

$\therefore abc = 6$

6. 모든 실수 x 에 대하여 다음 분수식 $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$ 가 항상 성립하도록 상수 a, b, c 의 값을 정할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

주어진 식의 우변을 통분하면

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{a(x+2)^2 + b(x+1)(x+2) + c(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$\therefore 1 = a(x+2)^2 + b(x+1)(x+2) + c(x+1)$$

이것이 x 에 대한 항등식이어야 하므로

양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $1 = a$

$x = -2$ 를 대입하면 $1 = -c$

즉, $c = -1$

$x = 0$ 을 대입하면 $1 = 4a + 2b + c$

$a = 1, c = -1$ 이므로 $1 = 4 + 2b - 1$

$\therefore b = -1$

$\therefore a + b + c = 1 - 1 - 1 = -1$

7. 분수식 $\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-2} + \frac{x+10}{x^2-4}$ 를 간단히 하면?

- ① $\frac{1}{x-2}$ ② $\frac{1}{x+2}$ ③ $\frac{4}{x-2}$ ④ $\frac{4}{x+2}$ ⑤ $\frac{4x}{x-2}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-2} + \frac{x+10}{x^2-4} \\ &= \frac{2x-4+x+2+x+10}{x^2-4} \\ &= \frac{4x+8}{x^2-4} \\ &= \frac{4}{x-2} \end{aligned}$$

8. $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{13 \times 14} = \frac{a}{14}$ 에서 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\begin{aligned} \text{준식} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdots - \frac{1}{14} = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14} \\ \therefore a &= 13 \end{aligned}$$

9. 다음 식의 최댓값을 구하면?

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+9)(x+10)}$$

- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{2}{5}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}, \\ \frac{1}{(x+1)(x+2)} &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \dots \frac{1}{(x+9)(x+10)} \\ &= \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+10} \\ \therefore (\text{준식}) \quad &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} = \frac{x+10-x}{x(x+10)} \\ &= \frac{10}{x(x+10)} = \frac{10}{(x+5)^2-25} \\ \therefore \text{최댓값은 } x &= -5 \text{ 일 때 } \frac{10}{-25} = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

10. 유리식 $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}}$ 을 간단히 하면?

① $1 - a^2$

② $(1 - a)^2$

③ 1

④ $1 + a^2$

⑤ $(1 + a)^2$

해설

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{a-1}} = \frac{a-1}{a-1-a} = 1-a$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{a+1}} = \frac{a+1}{a+1-a} = 1+a$$

$$\therefore (\text{준 식}) = 1 - a^2$$

11. $2 + \frac{1}{k + \frac{1}{m + \frac{1}{5}}} = \frac{803}{371}$ 일 때, 자연수 k, m 의 값에 대하여 $k + m$ 의

값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$\begin{aligned} \frac{803}{371} &= 2 + \frac{61}{371} = 2 + \frac{1}{\frac{371}{61}} \\ &= 2 + \frac{1}{6 + \frac{5}{61}} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{61}{5}}} \\ &= 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{12 + \frac{1}{5}}} \end{aligned}$$

따라서 $k = 6, m = 12$

$$\therefore k + m = 18$$

12. 자연수 a, b, c, d 에 대하여 $\frac{75}{23} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}$ 일 때, $a + b + c + d$

의 값은?

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설

$$\begin{aligned} \frac{75}{23} &= 3 + \frac{6}{23} = 3 + \frac{1}{\frac{23}{6}} \\ &= 3 + \frac{1}{3 + \frac{5}{6}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{6}{5}}} \\ &= 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} \\ \therefore a &= 3, b = 3, c = 1, d = 5 \\ \therefore a + b + c + d &= 12 \end{aligned}$$

13. $x^2 - 7x + 1 = 0$ 일 때 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값은?

① 45

② 46

③ 47

④ 48

⑤ 49

해설

x 로 나누면, $x - 7 + \frac{1}{x} = 0$

$x + \frac{1}{x} = 7$

$x^2 + \frac{1^2}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 47$

14. $\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2}$ 이고, $\frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하여라. (단, $abc \neq 0$, p, q 는 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : $p + q = 32$

해설

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2} = k (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$a = 4k, \quad b = 3k, \quad c = 2k$$

$$\therefore \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{11}{21}$$

$$\therefore p + q = 11 + 21 = 32$$

15. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ 이다. 이때, $m + n$ 의 값을 구하여라. (단, m, n 은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$2x - y + z = 0 \cdots \textcircled{A}$$

$$x - 2y + 3z = 0 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \times 2 - \textcircled{B} : 3x = z$$

$$\therefore x = \frac{z}{3}, y = \frac{5z}{3}$$

여기서 $x = k$ 라 하면 $y = 5k, z = 3k$

$$\text{따라서 } \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k^2 - 5k^2 + 25k^2}{k^2 + 25k^2 + 9k^2} = \frac{3}{5} \therefore m = 5, n = 3$$

$$\therefore m + n = 8$$

16. 0이 아닌 실수 x, y, z 에 대하여 등식 $2x - 6y + 4z = 0$, $3x + y - 2z = 0$ 이 성립한다. 이때, $\frac{x^2 + y^2}{xy + y^2}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

해설

두 식을 연립하여 풀면 $2x = y$ 가 나온다.

$$\frac{x^2 + y^2}{xy + y^2} = \frac{x^2 + 4x^2}{2x^2 + 4x^2} = \frac{5x^2}{6x^2} = \frac{5}{6}$$

17. $a : b = c : d$ 일 때 다음 등식 중 성립하지 않는 것은?(단, 분모는 모두 0 이 아니다.)

① $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
③ $\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$
⑤ $\frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

② $\frac{a+d}{a-d} = \frac{b+c}{b-c}$
④ $\frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 하면

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d} \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4} \div \textcircled{3}$ 하면

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서 가비의 리를 이용하면}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\therefore \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

18. 수질오염의 정도를 수치로 나타내는 한 방법으로 생물학적 지표가 사용된다. 이 지표는 유색생물의 수가 X , 무색생물의 수가 Y 일 때, $\frac{Y}{X+Y} \times 100(\%)$ 로 정의된다. 지난 달 수질검사에서 어떤 호수의 생물학적 지표는 10(%)이었다. 이번 달에 이 호수의 수질을 검사한 결과, 지난 달에 비해 유색생물의 수는 2배, 무색생물의 수는 3배가 되었다. 이번 달 이 호수의 생물학적 지표는 몇 퍼센트(%) 인가?
- ① 약 14.3% ② 약 15.2% ③ 약 16.4%
- ④ 약 17.1% ⑤ 약 18.5%

해설

지난 달 유색 생물의 수를 X , 무색 생물의 수를 Y 라 하면 $\frac{Y}{X+Y} \times 100 = 10$
따라서, $\frac{Y}{X+Y} = \frac{1}{10}$ 에서 $X = 9Y$
한편, 이번 달의 유색 생물의 수는 $2X$, 무색 생물의 수는 $3Y$
이므로 이번 달의 생물학적 지표는

$$\frac{3Y}{2X+3Y} \times 100 = \frac{3Y}{2 \cdot 9Y + 3Y} \times 100$$
$$= \frac{1}{7} \times 100 \approx 14.3(\%)$$

19. x, y, z 는 양수일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})\{ (xy)^{-1} + (yz)^{-1} + (zx)^{-1} \}}{(x + y + z)(xy + yz + zx)}$$

- ① $x^{-2}y^{-2}z^{-2}$

② $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}$

③ $(x + y + z)^{-2}$

④ $\frac{1}{xyz}$

⑤ $\frac{1}{xy + yz + zx}$

해설

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x + y + z} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \left(\frac{1}{xy + yz + zx} \right) \\ &\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \\ &= \frac{1}{x + y + z} \left(\frac{xy + yz + zx}{xyz} \right) \left(\frac{1}{xy + yz + zx} \right) \\ &\left(\frac{x + y + z}{xyz} \right) \\ &= \left(\frac{1}{xyz} \right)^2 = x^{-2}y^{-2}z^{-2} \end{aligned}$$

20. 다음은 $\frac{x^2-x-3}{x-1} - \frac{x^2+x-1}{x+1}$ 를 계산하는 과정이다. 다음 중 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 차례대로 구하고 풀이를 완성하여 그 값을 바르게 구한 것은?

$$\frac{x^2-x-3}{x-1} = (\text{㉠}) + \frac{(\text{㉡})}{x-1}$$

$$\frac{x^2+x-1}{x+1} = (\text{㉢}) + \frac{(\text{㉣})}{x+1}$$

- ㉠ $-x, +3, x, -1, \frac{2x+4}{x^2-1}$

㉡ $x, -3, x, -1, -\frac{2x+4}{x^2-1}$
- ㉢ $x, 3, x, 1, -\frac{2x+4}{x^2+1}$

㉣ $x, -1, x, -3, -\frac{2x-4}{x^2-1}$
- ㉤ $x, 1, x, 3, -\frac{2x+4}{x^2+1}$

해설

$$\frac{x^2-x-3}{x-1} = \frac{x(x-1)-3}{x-1} = x + \frac{-3}{x-1}$$

$$\frac{x^2+x-1}{x+1} = \frac{x(x+1)-1}{x+1} = x + \frac{-1}{x+1}$$

$$\therefore \text{㉠} = x, \text{㉡} = -3, \text{㉢} = x, \text{㉣} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{(준식)} &= x - \frac{3}{x-1} - \left(x - \frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-1} \\ &= \frac{x-1-3(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= -\frac{2x+4}{x^2-1} \end{aligned}$$

21. $A = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$, $B = \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{x}}}$, $C = \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{x}}}$ 에 대하여 $x = \frac{2}{5}$

일 때의 A, B, C 의 대소 관계를 순서대로 옳게 나타낸 것은?

- ① $A > B > C$

② $A \geq B = C$

③ $A < B < C$

④ $A \leq B = C$

⑤ $A = B = C$

해설

$$A = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{2}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{5}{2}} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

$$B = \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{x}}} = \frac{1}{\frac{8}{7}} = \frac{7}{8}$$

$$C = \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{21}{2}}} = \frac{1}{\frac{23}{21}} = \frac{21}{23}$$

$$\therefore A = \frac{2}{7}, B = \frac{7}{8}, C = \frac{21}{23}$$

$$\therefore A < B < C$$

22. $a + b = 4ab$, $b + c = 10bc$, $c + a = 6ca$ 일 때, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$a + b = 4ab \text{에서 } \frac{a+b}{ab} = 4$$

$$\text{즉 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 4 \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{같은 방법으로 } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 10 \cdots \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = 6 \cdots \textcircled{3}$$

① + ② + ③하면

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 20$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 10$$

23. $\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35}$ 에서 $\frac{x^2+y^2}{z^2}$ 의 값은? (단, x, y, z 는 모두 양수이다.)

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35} = k(k \neq 0)$ 라 하면
 $xy + zx = 27k$, $zy + xy = 32k$, $zx + yz = 35k$ 이므로
 $2(xy + yz + zx) = 94k$, $\therefore xy + yz + zx = 47k$ 이므로
 $yz = 20k$, $zx = 15k$, $xy = 12k$
또, $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 이므로
 $x^2 \cdot 400k^2 = 3600k^3$ 에서 $x^2 = 9k$
 $225k^2 \cdot y^2 = 3600k^3$ 에서 $y^2 = 16k$
 $144k^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 에서 $z^2 = 25k$
 $\therefore \frac{x^2+y^2}{z^2} = \frac{9k+16k}{25k} = 1$

24. 양수 a, b, c, d 는 $a : b = c : d$ 가 성립한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $ad + bc = 2ad$

② $\frac{ad}{bc} = 1$

③ $\frac{bc-1}{bc} + \frac{1}{ad} = 1$

④ $\frac{1}{bc} - \frac{1}{ad} = 0$

⑤ $a - b = \frac{1}{c - d}$

해설

①, ② $ad = bc$

③ $\frac{adbc - ad + bc}{adbc} = \frac{adbc}{adbc} = 1$

④ $\frac{1}{bc} = \frac{1}{ad}$

25. 어떤 버스 회사에서 버스 요금을 $a\%$ 인상하면 승객의 수가 $b\%$ 감소되지만, 수입은 $x\%$ 증가한다고 한다. 이때, x 를 a, b 를 사용하여 나타내면?

- ① $x = \frac{(100 + a)(100 - b)}{100}$
- ② $x = (100 + a)(100 - b)$
- ③ $x = \frac{a - b + 1}{100}$
- ④ $x = a - b - ab$
- ⑤ $x = a - b - \frac{ab}{100}$

해설

요금 인상 전의 버스 요금을 g , 승객의 수를 h 라 하면 버스 회사 수입은 gh 원이고 버스 요금을 $a\%$ 인상하면 승객의 수는 $b\%$ 감소된다.

인상 후의 버스 회사 수입은

$$g\left(1 + \frac{a}{100}\right) \times h\left(1 - \frac{b}{100}\right)$$
$$= \frac{100 + a}{100} \times \frac{100 - b}{100} \times gh(\text{원}) \text{이므로}$$
$$\frac{100 + a}{100} \times \frac{100 - b}{100} \times gh$$
$$= \left(1 + \frac{x}{100}\right) \times gh$$
$$(100 + a)(100 - b) = 100(100 + x)$$
$$\therefore x = a - b - \frac{ab}{100}$$