

1. 두 점 A(-3, 1) , B(2, 5) 사이의 거리는?

① 5

② $4\sqrt{2}$

③ 6

④ $\sqrt{41}$

⑤ $\sqrt{43}$

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{41}$$

2. 두 점 A(a , 1), B(4, -3) 사이의 거리가 $4\sqrt{5}$ 일 때, 실수 a 의 값들의 합은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-a)^2 + (-3-1)^2} = 4\sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 8a + 32 = 80, a^2 - 8a - 48 = 0$$

$$(a-12)(a+4) = 0$$

$$\therefore a = 12 \text{ 또는 } a = -4$$

$$\text{따라서 구하는 값은 } 12 - 4 = 8$$

3. 두 점 A (-3,2) , B (4,5) 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표를 구하면?

① (0, 0)

② (1, 0)

③ (2, 0)

④ (3, 0)

⑤ (4, 0)

해설

P(x,0)이라 놓으면 두 점 사이의 거리의 공식에 의하여

$$\sqrt{(x+3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (5-0)^2} \Rightarrow 14x = 28 \Rightarrow$$

$$x = 2$$

$$\therefore P(2,0)$$

4. $\overline{AB} = 7$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 5$ 인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{BC}$ 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{AM}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{21}$

해설

$\overline{BM} = 4$, $\overline{AM} = x$ 이므로 중선정리에 의해
 $7^2 + 5^2 = 2(x^2 + 4^2) \therefore x = \sqrt{21}$

5. A(1, 2), B(3, -2) 을 3 : 2로 외분하는 점 C(a, b) 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

외분점 구하는 공식을 이용한다.

C의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 3 - 2 \times 1}{3 - 2}, \frac{3 \times (-2) - 2 \times 2}{3 - 2} \right) = (7, -10)$$

$$\therefore a + b = -3$$

6. 두 점 A(-2, 1), B(4, 7) 의 중점의 좌표는?

- ① $M\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ ② $M(1, 2)$ ③ $M(1, 4)$
④ $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ⑤ $M(2, 2)$

해설

중점 M의 좌표 $M(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1, y = \frac{1+7}{2} = 4$$

따라서 $M(1, 4)$

7. 두 점 A(-4, -3), B(11, 9) 에 대하여 선분 AB 를 1 : 2 로 내분하는 점의 좌표는?

- ① (1, 1) ② $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ③ (3, 3)
④ $\left(\frac{7}{5}, \frac{5}{2}\right)$ ⑤ (6, 5)

해설

$\overline{AB}$ 를 1 : 2 로 내분하는 점을 (x,y)라 하면

$$x = \frac{11 - 8}{1 + 2} = 1, y = \frac{9 - 6}{1 + 2} = 1$$

∴ (1, 1)

8. 두 점 $(1, -2)$, $(3, 6)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a - b$ 의 값은?

① 1

② 4

③ 7

④ 10

⑤ 13

해설

두 점 $(1, -2)$, $(3, 6)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y + 2 = \frac{6 + 2}{3 - 1}(x - 1)$$

$$y + 2 = 4(x - 1)$$

$$\therefore y = 4x - 6$$

$$\text{즉, } a = 4, b = -6$$

$$\therefore a - b = 4 - (-6) = 10$$

9. 좌표평면 위의 점 $(1, 2)$ 와 직선 $x + 2y = 0$ 사이의 거리는?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

점 $(1, 2)$ 와 직선 $x + 2y = 0$ 사이의 거리 d 는

$$\therefore d = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

10. 방정식 $2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$ 은 원을 나타낸다. 반지름의 길이를 구하면?

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 4 ③ $\sqrt{2}$ ④ 1 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 3 &= 0 \\ \Rightarrow 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 2(y^2 - 2y + 1 - 1) + 3 &= 0 \\ \Rightarrow 2(x + 1)^2 + 2(y - 1)^2 &= 1 \\ \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 &= \frac{1}{2} \\ \therefore \text{반지름 길이 } \sqrt{\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

11. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ 의 중심의 좌표는?

① $(2, -4)$

② $(2, 4)$

③ $(-2, -3)$

④ $(-2, 3)$

⑤ $(4, -4)$

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 &= 0 \\ \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 &= 25 \\ \Rightarrow \text{중심은 } (-2, 3) \end{aligned}$$

12. 두 점 $A(a, 2b + a)$, $B(-a, a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(-a-a)^2 + \{a-(2b+a)\}^2} \\ &= \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{5} \\ \therefore a^2 + b^2 &= 5\end{aligned}$$

13. 네 점 $O(0, 0)$, $A(3, 1)$, $B(4, 3)$, $C(a, b)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\square OABC$ 가 평행사변형일 때, $a + b$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

평행사변형 $OABC$ 에서 두 대각선 OB , AC 의 중점이 일치하므로

$$\left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

$$\frac{a+3}{2} = 2 \text{에서 } a = 1$$

$$\frac{b+1}{2} = \frac{3}{2} \text{에서 } b = 2$$

$$\therefore a + b = 3$$

14. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 A($a, 2$), B($-1, 0$), C($5, b$)인 $\triangle ABC$ 의 세 변 AB, BC, CA를 2 : 1로 외분하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\triangle DEF$ 의 무게중심의 좌표가 (2, 1)이 되도록 하는 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

세 변 AB, BC, CA를 2 : 1로 외분하는 점

D, E, F의 좌표를 각각 구하면

$$D\left(\frac{2 \times (-1) - 1 \times a}{2 - 1}, \frac{2 \times 0 - 1 \times 2}{2 - 1}\right)$$

$$= D(-a - 2, -2)$$

$$E\left(\frac{2 \times 5 - 1 \times (-1)}{2 - 1}, \frac{2 \times b - 1 \times 0}{2 - 1}\right)$$

$$= E(11, 2b)$$

$$F\left(\frac{2 \times a - 1 \times 5}{2 - 1}, \frac{2 \times 2 - 1 \times b}{2 - 1}\right)$$

$$= F(2a - 5, 4 - b) \text{ 이므로}$$

$\triangle DEF$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-a - 2 + 11 + 2a - 5}{3}, \frac{-2 + 2b + 4 - b}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{a + 4}{3}, \frac{b + 2}{3}\right)$$

이때, $\triangle DEF$ 의 무게중심의 좌표가

(2, 1)이므로

$$\frac{a + 4}{3} = 2, \frac{b + 2}{3} = 1$$

$$\therefore a = 2, b = 1 \therefore a + b = 3$$

(다른 풀이) 일반적으로 $\triangle ABC$ 의 무게중심과

$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 를 $m : n$ 으로 외분하는 점

(내분하는 점)을 이은 삼각형의 무게중심은 일치한다.

$$\therefore \left(\frac{a - 1 + 5}{3}, \frac{2 + 0 + b}{3}\right) = (2, 1)$$

$$\therefore a = 2, b = 1$$

15. 직선 $x+ay+3=0$ 이 $2x-3y-5=0$ 에 평행하도록 상수 a 의 값은?

- ① $\frac{3}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

두 직선 $x+ay+3=0$, $2x-3y-5=0$ 이 평행

$$\frac{2}{1} = \frac{-3}{a} \neq \frac{-5}{3}, \text{ 즉 } \frac{2}{1} = \frac{-3}{a}$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2}$$

16. 점 A(-2, 1), B(4, 4) 를 이은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점을 지나 AB 에 수직인 직선의 방정식을 l 이라고 할 때, 점 (1, 0) 에서 직선 l 에 이르는 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

선분 AB 의 내분점의 좌표

$$M\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times (-2)}{2 + 1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2 + 1}\right) = (2, 3)$$

$$\text{직선 AB 의 기울기는 } \frac{4 - 1}{4 - (-2)} = \frac{1}{2}$$

그러므로 직선 l 은 기울기가 -2 이고

(2, 3)을 지나므로 $l : y - 3 = -2(x - 2)$

$$\therefore 2x + y - 7 = 0$$

따라서 (1, 0) 으로부터 직선 l 까지의 거리는

$$\frac{|2 \cdot 1 + 0 - 7|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

17. A(0, -2), B(3, 3), C(4, 0) 인 $\triangle ABC$ 의 넓이는?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$$

또, 직선 BC의 방정식은 $3x + y - 12 = 0$ 이므로

A(0, -2)로부터 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{|-2-12|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{14}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH} = 7$$

18. 세 점 A(-1, 0), B(2, -3), C(5, 3)에 대하여 등식 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax + y + b = 0$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
주어진 조건에서,
 $(x+1)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2$
 $= 2[(x-5)^2 + (y-3)^2]$
 $2x^2 - 2x + 2y^2 + 6y + 14$
 $= 2(x^2 - 10x + y^2 - 6y + 34)$
 $18x + 18y - 54 = 0$
 $\Rightarrow x + y - 3 = 0$
 $\therefore a + b = 1 + (-3) = -2$

19. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이
반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x - k)^2 + (y + k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

반지름의 길이가 1 이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } -k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0, (k - 1)(k - 3) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 합은 4이다.

20. 세 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ 을 지나는 원의 방정식이 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (단, $r > 0$) 라고 할 때, $a + b + r$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

구하는 원의 방정식을
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓는다.
세 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ 은
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
위의 점이므로 등식이 성립한다.
따라서 세 점을 대입한 식을 연립시키면
구하는 원의 방정식은 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 이다.
 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 을 정리하면
 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 이다.
따라서 $a = 1$, $b = 0$, $r = 1$ 이므로
 $a + b + r = 2$ 이다.

21. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + c = 0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 c 의 값의 범위를 정하면?

① $c < 1$ ② $c < 2$ ③ $c < 3$ ④ $c < 4$ ⑤ $c < 5$

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 5 - c$$

$$\therefore (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - c \quad \leftarrow \quad 5 - c = r^2$$

이 방정식의 그래프가 원이 되려면

$$5 - c > 0 \quad \leftarrow \quad r^2 > 0$$

$$\therefore c < 5$$

22. x 축에 접하는 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 의 중심의 좌표가 $(3, -2)$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

중심의 좌표가 $(3, -2)$ 인 원이 x 축에 접하므로
반지름의 길이는 2 이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$
 $\therefore x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$
 $\therefore a + b + c = -6 + 4 + 9 = 7$

23. 좌표평면 위의 두 점 A(1,0),B(5,4)에 대하여 조건 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 를 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x - y + 1 = 0$ ② $x + 2y + 4 = 0$ ③ $x + y + 3 = 0$

④ $x - 3y + 4 = 0$ ⑤ $x + y - 5 = 0$

해설

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓고 주어진 조건

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 를 이용하여

x, y사이의 관계식을 구한다.

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓자.

이때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16$$

$$8x + 8y - 40 = 0$$

$$\therefore x + y - 5 = 0$$

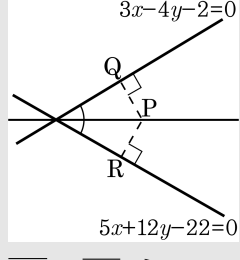
24. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q,R이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$$13(3X-4Y-2) = \pm 5(5X+12Y-22)$$

$$\text{즉, } 13(3X-4Y-2) = 5(5X+12Y-22) \text{ 또는}$$

$$13(3X-4Y-2) = -5(5X+12Y-22) \text{ 정리하면}$$

$$x-8y+6=0 \text{ 또는 } 8x+y-17=0 \text{ 에서}$$

기울기가 양이므로

$$\therefore x-8y+6=0$$

$$\therefore a+b+c=-1$$

25. 점 Q가 직선 $2x + y - 4 = 0$ 위를 움직일 때, 점 A(-2, 3)과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

- ① $4x + 2y - 3 = 0$
- ② $2x + 3y + 1 = 0$
- ③ $4x - 3y + 1 = 0$
- ④ $x - 4y - 3 = 0$
- ⑤ $-x + y + 2 = 0$

해설

점 A(-2, 3), Q(x, y)의 중점의 좌표를 P(X, Y)라 하면,
 $P(X, Y) = P\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right)$ 이므로
 $X = \frac{x-2}{2}, Y = \frac{y+3}{2}$
 $\therefore x = 2X + 2, y = 2Y - 3$
이것을 $2x + y - 4 = 0$ 에 대입하면
 $2(2X + 2) + (2Y - 3) - 4 = 0$
 $4X + 2Y - 3 = 0$
 $\therefore 4x + 2y - 3 = 0$