

1. 다음 식을 계산하면?

$$\frac{x^3 - 1}{x^4 + x^2 + 1} \times \frac{x^3 + 1}{x^4 - 1}$$

① x

② x^2

③ $\frac{1}{x}$

④ $\frac{1}{x^2}$

⑤ $\frac{1}{x^2 + 1}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x^3 - 1}{x^4 + x^2 + 1} \times \frac{x^3 + 1}{x^4 - 1} \\ &= \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} \\ & \quad \times \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)} \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

2. 다음 무리식의 값이 실수가 되는 x 의 범위를 구하면?

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$$

① $1 < x < 3$

② $1 \leq x \leq 3$

③ $x > 3$

④ $x < 1$

⑤ $x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$

해설

$$x - 1 \geq 0, x \geq 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$3 - x \geq 0, x \leq 3 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$\therefore \textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 을 모두 만족하는 범위는 $1 \leq x \leq 3$

3. $x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$ 일 때, $(x+y)^2 + (x-y)^2$ 의 값은?

① $2\sqrt{6}$

② $-2\sqrt{6}$

③ $5 + 2\sqrt{6}$

④ $5 - 2\sqrt{6}$

⑤ $10 - 2\sqrt{6}$

해설

$$x + y = \sqrt{5}, \quad x - y = -\sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\therefore (x+y)^2 + (x-y)^2 = 5 + (5 - 2\sqrt{6})$$

$$= 10 - 2\sqrt{6}$$

4. 유리수 x, y 가 등식 $(2x-3) + (-y+3)\sqrt{2} = 1 - 2\sqrt{2}$ 를 만족할 때, xy 의 값은?

① 2

② 5

③ 7

④ 10

⑤ 25

해설

무리식의 상등에 의해 $2x-3=1$, $-y+3=-2$

$\therefore x=2, y=5$

$\therefore xy=10$

5. 다음 무리함수 중 함수 $y = \sqrt{-x}$ 을 평행이동하여 얻을 수 없는 것을 고르면?

① $y = \sqrt{-x+2}$

② $y = \sqrt{-(x+1)} + 3$

③ $y = \sqrt{3-x}$

④ $y = \sqrt{x-1} - 1$

⑤ $y = \sqrt{-x} - 1$

해설

$y = \sqrt{-x}$ 에서 x 앞의 부호가 반대일 경우
평행이동하여 얻을 수 없다.

6. $(x+y):(y+z):(z+x)=6:7:5$ 일 때, $\frac{x^2-yz}{x^2+y^2}$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{2}{5}$

② $-\frac{4}{13}$

③ $\frac{2}{5}$

④ $\frac{4}{13}$

⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$$\begin{cases} x+y=6k \cdots \textcircled{㉠} \\ y+z=7k \cdots \textcircled{㉡} \\ z+x=5k \cdots \textcircled{㉢} \end{cases} \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢}$ 를 해 주면 $2(x+y+z)=18k$

$\therefore x+y+z=9k$

$\therefore x=2k, y=4k, z=3k$

$\therefore \frac{x^2-yz}{x^2+y^2} = \frac{4k^2-12k^2}{4k^2+16k^2} = \frac{-8}{20} = -\frac{2}{5}$

7. 다음 함수의 그래프 중 평행이동에 의하여 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹치는 것은?

① $y = \frac{2x-1}{x-1}$

② $y = \frac{2x}{x-1}$

③ $y = \frac{2x+1}{x-1}$

④ $y = \frac{2x}{2x-1}$

⑤ $y = \frac{2x}{2x+1}$

해설

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{2x-2+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{2x-2+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{2x-2+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

$$\textcircled{4} \quad y = \frac{2x-1+1}{2x-1} = 1 + \frac{1}{2x-1}$$

$$\textcircled{5} \quad y = \frac{2x+1-1}{2x+1} = 1 - \frac{1}{2x+1}$$

따라서, ① 의 그래프는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축, y 축 방향으로 각각 1, 2 만큼 평행이동시킨 것이다.

8. 함수 $y = \frac{2+x}{1-2x}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = a, y = b$ 일 때, a 의 값을 구하면?

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ 0

④ 1

⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{x+2}{-2x+1} \\ &= \frac{x+2}{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}}{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{5}{2}}{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{2} \\ \therefore a &= \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

9. 곡선 $xy + x - 3y - 2 = 0$ 이 지나지 않는 사분면을 구하면?

① 제 1 사분면

② 제 2 사분면

③ 제 3 사분면

④ 제 4 사분면

⑤ 없다.

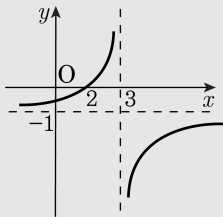
해설

$xy + x - 3y - 2 = 0$ 을 y 에 대하여
정리하면 $(x-3)y = -x+2$

$$\therefore y = \frac{-x+2}{x-3} = \frac{-1}{x-3} - 1 (x \neq 3)$$

즉, $y = \frac{-1}{x-3} - 1$ 은 점근선이

$x=3$, $y=-1$ 이고 점 $(2, 0)$ 을 지나므로
그래프는 다음 그림과 같다. 따라서,
제 2 사분면을 지나지 않는다.



10. $f(t) = \frac{t}{1-t}$ (단, $t \neq 1$) 인 함수 f 가 있다. $y = f(x)$ 일 때, $x = \square$ 로 나타낼 수 있다. $\square$ 안에 알맞은 것은?

① $-f(y)$

② $-f(-y)$

③ $f(-y)$

④ $f\left(\frac{1}{y}\right)$

⑤ $f(y)$

해설

$$y = f(x) = \frac{x}{1-x} \text{ 에서}$$

$$y - xy = x, \quad x(1+y) = y$$

$$\therefore x = \frac{y}{1+y} = \frac{-y}{1-(-y)} = -f(-y)$$

11. 함수 $y = \frac{ax+1}{x-1}$ 의 역함수가 그 자신이 되도록 a 의 값을 정하면?

① -1

② 1

③ -2

④ 2

⑤ 0

해설

$$y = \frac{ax+1}{x-1} \text{ 에서 } y(x-1) = ax+1$$

$$yx - y = ax + 1, yx - ax = 1 + y$$

$$x(y-a) = 1+y, x = \frac{1+y}{y-a}$$

$$\therefore y^{-1} = \frac{x+1}{x-a}$$

역함수가 본래 함수와 같으므로

$$\frac{x+1}{x-a} = \frac{ax+1}{x-1}$$

$$\therefore a = 1$$

12. $1 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $y = -\sqrt{3x+1} + 4$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$$y = -\sqrt{3x+1} + 4 = -\sqrt{3\left(x + \frac{1}{3}\right)} + 4$$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$$x = 1 \text{ 일 때, 최댓값 } a = -\sqrt{3+1} + 4 = 2$$

$$x = 5 \text{ 일 때, 최솟값 } b = -\sqrt{15+1} + 4 = 0$$

$$\therefore a - b = 2 - 0 = 2$$

13. 등식 $\frac{x^2 + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$ 이 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c 에 대하여 abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -25

해설

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$ 이므로

양변에 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 을 곱하면

$$x^2 + 1 = a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $2 = 2a$

$$\therefore a = 1$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면 $5 = -b$

$$\therefore b = -5$$

양변에 $x = 3$ 을 대입하면 $10 = 2c$

$$\therefore c = 5$$

$$\therefore abc = -25$$

14. 부분분수를 이용하여 다음을 만족시키는 양수 x 를 구하여라.

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} = \frac{4}{9}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 식을 부분분수로 나타내면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \right\} \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+8} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x(x+8)} = \frac{4}{x(x+8)} \\ & = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\therefore x(x+8) = 9$$

$$x^2 + 8x - 9 = (x-1)(x+9) = 0$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = 1$$

15. $2 + \frac{1}{k + \frac{1}{m + \frac{1}{5}}} = \frac{803}{371}$ 일 때, 자연수 k, m 의 값에 대하여 $k + m$ 의

값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$\begin{aligned} \frac{803}{371} &= 2 + \frac{61}{371} = 2 + \frac{1}{\frac{371}{61}} \\ &= 2 + \frac{1}{6 + \frac{5}{61}} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{61}{5}}} \\ &= 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{12 + \frac{1}{5}}} \end{aligned}$$

따라서 $k = 6, m = 12$

$$\therefore k + m = 18$$

16. $a + b + c = 1$ 일 때, $\frac{a^2 - 1}{b + c} + \frac{b^2 - 1}{c + a} + \frac{c^2 - 1}{a + b}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 - 1}{b + c} + \frac{b^2 - 1}{c + a} + \frac{c^2 - 1}{a + b} \\ &= \frac{(a - 1)(a + 1)}{b + c} + \frac{(b - 1)(b + 1)}{c + a} \\ &+ \frac{(c - 1)(c + 1)}{a + b} \end{aligned}$$

그런데 $a + b + c = 1$ 이므로

$$a - 1 = -(b + c), \quad b - 1 = -(c + a), \quad c - 1 = -(a + b)$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= -(a + 1) - (b + 1) - (c + 1) \\ &= -(a + b + c) - 3 = -1 - 3 = -4 \end{aligned}$$

17. $x + y - z = 2x + 3y - 2z = -x - 2y + 2z$ 일 때,
 $\left(\frac{1}{y} + \frac{2}{z}\right) : \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{x}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right)$ 를 가장 간단한 정수비로 나타내면?

① $3 : 2 : 5$

② $3 : 5 : -5$

③ $2 : 3 : 5$

④ $3 : 5 : 2$

⑤ $2 : 3 : -2$

해설

$$x + y - z = 2x + 3y - 2z \text{에서 } x + 2y = z \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x + y - z = -x - 2y + 2z \text{에서 } 2x + 3y = 3z \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } y = -z, x = 3z$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{z}\right) : \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{x}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{z} + \frac{2}{z}\right) : \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{3z}\right) : \left(\frac{1}{3z} - \frac{2}{z}\right) \\ &= \left(\frac{1}{z}\right) : \left(\frac{5}{3z}\right) : \left(-\frac{5}{3z}\right) \\ &= 3 : 5 : -5 \end{aligned}$$

18. 0이 아닌 세 실수 x, y, z 에 대하여 $\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7}$ 를 만족할 때, $\frac{(x+y)^2 - z^2}{x^2 - y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 정수)이다. $m+n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7} = k \text{ 라 하자}$$

$$\Rightarrow x+y=5k, y+z=6k, z+x=7k$$

$$\text{세 식을 모두 더하여 정리하면 } x+y+z=9k$$

$$\text{다시 식에 대입하면 } x=3k, y=2k, z=4k$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{(x+y)^2 - z^2}{x^2 - y^2 + z^2} \\ &= \frac{25k^2 - 16k^2}{9k^2 - 4k^2 + 16k^2} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$$\therefore m=7, n=3$$

$$\therefore m+n=10$$

19. $a : b = c : d$ 일 때 다음 등식 중 성립하지 않는 것은?(단, 분모는 모두 0 이 아니다.)

$$\textcircled{1} \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a+d}{a-d} = \frac{b+c}{b-c}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠}$ 하면

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d} \dots \textcircled{㉢}$$

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \dots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉣} \div \textcircled{㉢}$ 하면

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서 가비의 리를 이용하면}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\therefore \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

20. 한 변의 길이가 a 인 정삼각형과 반지름의 길이가 b 인 원의 넓이가 같을 때, $a^4 : b^4$ 의 값은?

① $8\pi^2 : 3$

② $8\pi^2 : 5$

③ $4\pi^2 : 1$

④ $12\pi^2 : 5$

⑤ $16\pi^2 : 3$

해설

정삼각형과 원의 넓이가 각각 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, πb^2 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \pi b^2, a^2 : b^2 = 4\pi : \sqrt{3}$$

$$\therefore a^4 : b^4 = 16\pi^2 : 3$$

21. 두 함수 $y = \frac{5x+1}{3x-2}$, $y = \frac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선이 일치할 때,
 $a+b$ 의 값은?

① $\frac{4}{3}$

② $\frac{5}{3}$

③ 2

④ 3

⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$y = \frac{5x+1}{3x-2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = \frac{2}{3}, y = \frac{5}{3} \text{ 이고,}$$

$y = \frac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{b}{2}, y = \frac{a}{2} \text{ 이다.}$$

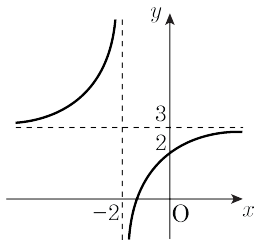
이 때, 두 그래프의 점근선이 일치하므로

$$\frac{2}{3} = -\frac{b}{2}, \frac{5}{3} = \frac{a}{2}$$

$$\therefore a = \frac{10}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore a+b=2$$

22. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x = -2, y = 3$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값은?



- ① -9 ② -7 ③ -5
④ 7 ⑤ 9

해설

점근선이 $x = -2, y = 3$ 이므로 $y = 3 + \frac{k}{x+2}, (k \neq 0)$

점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = 3 + \frac{k}{0+2}, \quad k = -2$$

$$\text{따라서 } y = 3 + \frac{-2}{x+2} = \frac{3x+4}{x+2}$$

$$\therefore a = 3, b = 4, c = 2$$

$$\therefore a + b + c = 9$$

23. $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $\frac{1}{b} + a$ 의 값을 구하면?

① $2 + \sqrt{3}$

② $3 + \sqrt{3}$

③ $4 + \sqrt{3}$

④ $5 + \sqrt{3}$

⑤ $5 - \sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{19 - 2\sqrt{48}} = 4 - \sqrt{3} \text{에서}$$

$$4 - \sqrt{3} = 2 + (2 - \sqrt{3}) \text{이므로}$$

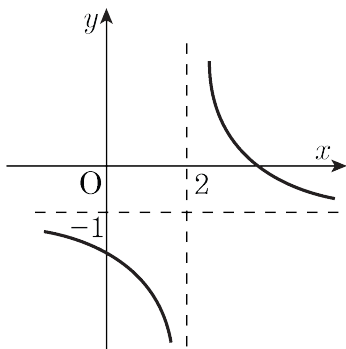
$$a = 2, b = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{1}{b} + a = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + 2$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} + 2$$

$$= 4 + \sqrt{3}$$

24. 분수함수 $y = \frac{b}{x+a} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 무리함수 $y = \sqrt{cx+a} + b$ 의 그래프가 지나가는 사분면을 모두 구하면?



- ① 제1사분면 ② 제2사분면 ③ 제3사분면
④ 제4사분면 ⑤ 제1,2사분면

해설

$y = \frac{b}{x+a} + c$ 의 점근선은 $x = -a$, $y = c$

그림에서 $-a > 0$, $c < 0$ 이고, $b > 0$

$\therefore a < 0$, $b > 0$, $c < 0 \cdots \textcircled{1}$

한편 $y = \sqrt{cx+a} + b = \sqrt{c\left(x + \frac{a}{c}\right)} + b$ 이므로

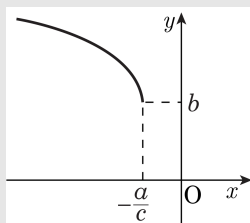
$$c\left(x + \frac{a}{c}\right) \geq 0$$

이때 $c < 0$ 이므로 $x \leq -\frac{a}{c}$

$\textcircled{1}$ 에서 $-\frac{a}{c} < 0$ 이므로 $x < 0$

또 $y = \sqrt{cx+a} + b \geq b$

따라서 그래프는 다음 그림과 같이



제2사분면만을 지난다.

25. 무리함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 두 점 $(2, 2)$, $(3, 6)$ 을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k 의 개수를 구하여라.



답:

개



정답: 11 개

해설

함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 $(2, 2)$ 를 지날 때

$$2 = \sqrt{2k}, \quad 2k = 4$$

$$\therefore k = 2$$

또, 함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 $(3, 6)$ 을 지날 때

$$6 = \sqrt{3k}, \quad 3k = 36$$

$$\therefore k = 12$$

따라서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$$2 \leq k \leq 12 \text{ 이므로}$$

정수 k 는 2, 3, 4, $\dots$, 12 의 11 개다.