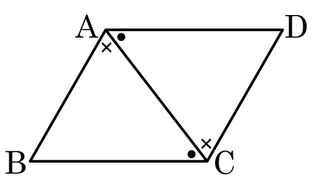
1. 다음은 평행사변형의 성질을 증명하는 과정이다. 어떤 성질을 증명한 것인가?



평행사변형에서 점 A와 점 C를 이으면
$\triangle ABC$와 $\triangle CDA$에서 $\overline{AC}$는 공통 ⋯ ㉠
$\overline{AB} \,/\!/\, \overline{CD}$이므로 $\angle BAC = \angle DCA$ ⋯ ㉠
$\overline{AD} \,/\!/\, \overline{BC}$이므로 $\angle BCA = \angle DAC$ ⋯ ㉠
㉠, ㉡, ㉢에 의해서 $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$(ASA 합동)
$\therefore\ \angle A = \angle C,\ \angle B = \angle D$

① 평행사변형에서 두 쌍의 엇각의 크기가 각각 같다.

② 평행사변형에서 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.

③ 평행사변형에서 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.

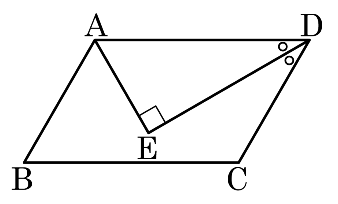
④ 평행사변형에서 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.

⑤ 평행사변형에서 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

해설

평행사변형에서 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같음을 증명하는 과정이다.

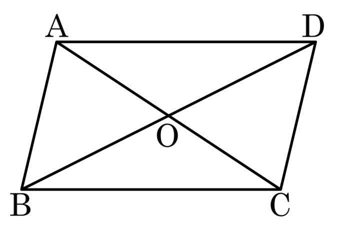
2. 평행사변형 ABCD 에서 $\angle BAD = 120°$ 이다. 점 A 에서 $\angle D$ 의 이등분선에 내린 수선의 발을 E 라 할 때, $\angle BAE$ 의 크기는?



① 50° ② 55° ③ 60° ④ 65° ⑤ 70°

해설
$\angle A = 120°$
$\angle D = 60°$
$\angle ADE = 30°$
$\angle DAE = 180° - 90° - 30° = 60°$
$\therefore\ \angle BAE = 120° - 60° = 60°$

3. 다음은 □ABCD 가 평행사변형일 때, 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분함을 증명하는 과정이다. ㉠~㉤ 중 알맞지 <u>않은</u> 것을 골라라.



가정 : □ ABCD 에서 $\overline{AB}=\overline{DC}, \overline{AD}=\overline{BC}$
결론 : $\overline{AO}=\overline{CO}$, $\overline{BO}=\overline{DO}$
증명 : △ABO 와 △CDO 에서 $\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$ 이므로
$\angle BAO$=(㉠$\angle DCO$) (엇각)
$\angle ABO=\angle CDO$ (엇각)
$\overline{AB}$ =(㉡$\overline{CD}$)
∴ △ABO ≡ △CDO (㉢$\overline{SSS}$ 합동)
∴ $\overline{AO}$ = (㉣$\overline{CO}$), (㉤$\overline{BO}=\overline{DO}$)

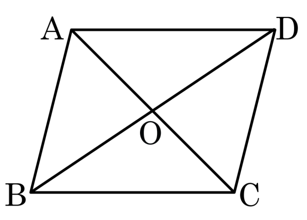
▶ 답 :

▷ 정답 : ㉤

해설

한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 같은 삼각형은 ASA 합동이다.

4. □ABCD 가 항상 평행사변형이 되지 않는 것은?



① $\overline{AB}//\overline{DC}$, $\overline{AD}//\overline{BC}$

② $\angle B = 90°$, $\angle C = 90°$, $\angle D = 90°$

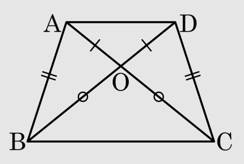
③ $\overline{AB}//\overline{DC}$, $\overline{AB} = \overline{DC} = 3\,cm$

④ $\overline{OA} = \overline{OD}$, $\overline{OB} = \overline{OC}$ (단, 점 O 는 두 대각선의 교점이다.)

⑤ $\overline{AB} = \overline{DC} = 5\,cm$, $\overline{AD} = \overline{BC} = 7\,cm$

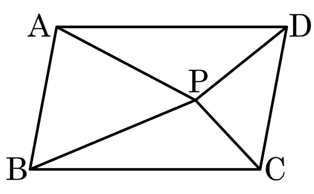
해설

① 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로 평행사변형이 된다.
② 사각형의 내각의 합은 360° 이므로 $\angle A = 90°$ 가 된다. 두 쌍의 대각의 크기는 같으므로 평행사변형이 된다.
③ 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으므로 평행사변형이 된다.
④ (반례) 등변사다리꼴



⑤ 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같으므로 평행사변형이 된다.

5. 다음 그림과 같이 평행사변형 ABCD 의 내부에 한 점 P 를 잡을 때, □ABCD 의 넓이는 60cm^2 이고, △ABP 의 넓이는 △CDP 의 넓이의 2 배일 때, △CDP 의 넓이를 구하면 ?



① 5cm^2 ② 10cm^2 ③ 15cm^2
④ 20cm^2 ⑤ 25cm^2

해설

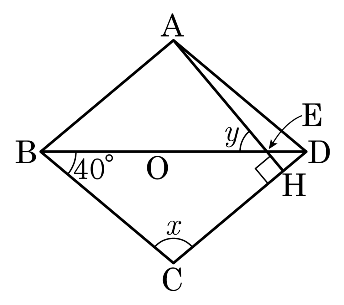
내부의 한 점 P 에 대하여 $\frac{1}{2}$□ABCD = △PAB + △PCD = △PAD + △PBC 이므로

△ABP + △CDP = $\frac{1}{2}$□ABCD 이다.

△ABP = 2△CDP 이므로 3△CDP = $\frac{1}{2}$□ABCD

∴ △CDP = $\frac{1}{6}$□ABCD = $10(\text{cm}^2)$

6. 다음 그림에서 □ABCD 가 마름모일 때, $\angle x$ 와 $\angle y$ 의 크기는?

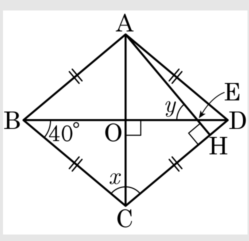


① $x = 90°,\ y = 45°$　② $x = 95°,\ y = 45°$

③ $x = 90°,\ y = 40°$　④ $x = 100°,\ y = 50°$

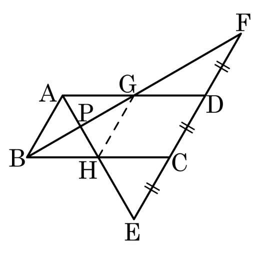
⑤ $x = 100°,\ y = 40°$

해설



(1)$\angle CBO = 40°$ 이고, $\angle BOC = 90°$ 이므로,
$\angle BCO = 50°$, $\angle x = 2\angle BCO$ 이므로
$\therefore \angle x = 100°$
(2) $\triangle DEH$ 에서 $\angle EDH = 40°,\ \angle DHE = 90°$
이므로, $\angle DEH = 50°$
$\angle y = \angle DEH$ (맞꼭지각)이므로
$\therefore \angle y = 50°$
$\therefore \angle x = 100°,\ \angle y = 50°$ 이다.

7. 다음 그림의 □ABCD 는 평행사변형이고 $\overline{AD} = 2\overline{AB}$, $\overline{FD} = \overline{DC} = \overline{CE}$ 이다. $\overline{AE}$ 와 $\overline{BF}$ 의 교점을 P 라 할 때, $\angle APB$ 의 크기를 구하여라.



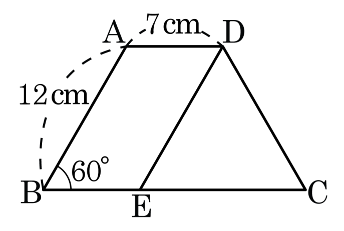
▶ 답: $\underline{\quad\quad\quad}$ °

▷ 정답: $90°$

해설

$\angle BAP = \angle AEF$ (엇각) 이고, $\overline{AD} = \overline{DE}$ 이므로 $\angle AED = \angle EAG$ 이다.
또, $\angle ABP = \angle BFD$ (엇각) 이고, $\overline{BC} = \overline{CF}$ 이므로 $\angle FBC = \angle BFC$ 이다.
$\angle A + \angle B = 180°$ 이므로 $\angle ABP + \angle BAP = 90°$ 이고, $\angle APB = 90°$ 이다.

8. 다음 그림의 $\square$ABCD는 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$인 등변사다리꼴이다. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?



① $\overline{DE} = 12\text{cm}$

② $\overline{BC} = 19\text{cm}$

③ $\triangle$DEC는 정삼각형

④ $\triangle$DEC의 둘레의 길이는 21cm

⑤ $\square$ABCD의 둘레의 길이는 50cm

해설

$\angle B = \angle C = 60°$, $\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{DE} = 12\text{cm}$이므로 $\triangle$DEC는 이등변삼각형이다.
$\angle C = \angle DEC = 60°$
따라서 $\triangle$DEC는 내각이 모두 60°이므로 정삼각형이다. $\therefore \overline{EC} = 12(\text{cm})$
$\angle B = \angle DEC$이므로 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$이고, $\overline{AB} = \overline{DE} = 12\text{cm}$이므로 $\square$ABED는 평행사변형이다.
$\overline{AD} = \overline{BE} = 7\text{cm}$
$\therefore\ \overline{BC} = \overline{BE} + \overline{EC} = 7 + 12 = 19$
따라서 $\square$ABCD 둘레의 길이는 $7 + 12 \times 2 + 19 = 50(\text{cm})$이다.

9. 다음은 여러 가지 사각형의 정의를 나타낸 것이다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

H : 한 쌍의 대변이 평행한 사각형
V : 두 밑각의 크기가 같은 사다리꼴
P : 두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형
Q : 네 각의 크기가 모두 같은 사각형
R : 네 변의 길이가 모두 같은 사각형
S : 네 변의 길이가 같고, 네 내각의 크기가 같은 사각형

① S는 R이다. ② S는 Q이다. ③ Q는 V이다.
④ R은 Q이다. ⑤ P는 H이다.

해설

H (사다리꼴) : 한 쌍의 대변이 평행한 사각형
V (등변사다리꼴) : 두 밑각의 크기가 같은 사다리꼴
P (평행사변형) : 두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형
Q (직사각형) : 네 각의 크기가 모두 같은 사각형
R (마름모) : 네 변의 길이가 모두 같은 사각형
S (정사각형) : 네 변의 길이가 같고, 네 내각의 크기가 같은 사각형
④ : $R \not\subset Q$

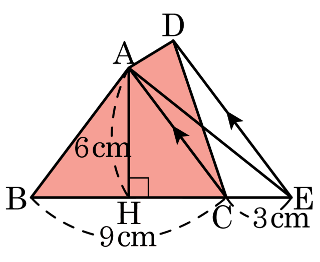
10. 다음은 사각형과 그 중점을 연결해 만든 사각형을 대응 시켜놓은 것이다. 옳지 않은 것은?

① 정사각형 - 정사각형
② 마름모 - 직사각형
③ 직사각형 - 정사각형
④ 평행사변형 - 평행사변형
⑤ 등변사다리꼴 - 마름모

해설

직사각형의 중점을 연결해 만들면 마름모가 된다. 마름모는 반드시 정사각형이라고 할 수 없다.
따라서 ③은 틀렸다.

11. 다음 그림과 같이 $\overline{AC} \,/\!/\, \overline{DE}$, $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ 일 때, $\square ABCD$ 의 넓이는?



① $18cm^2$　② $24cm^2$　③ $27cm^2$

④ $30cm^2$　⑤ $36cm^2$

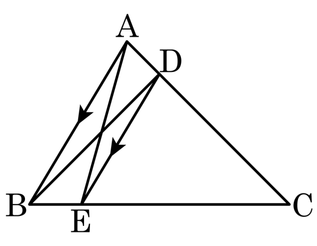
해설

$\overline{AC} \,/\!/\, \overline{DE}$ 이므로 $\triangle ADC$ 와 $\triangle AEC$ 는 밑변과 높이가 같으므로 넓이가 같다.

$\therefore \square ABCD = \triangle ABC + \triangle ADC = \triangle ABC + \triangle AEC$

$= \triangle ABE = \frac{1}{2} \times (9+3) \times 6 = 36(cm^2)$

12. 다음 그림과 같은 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB} \,//\, \overline{DE}$이고, $\triangle ABC = 30$, $\triangle DBC = 24$일 때, $\triangle ABE$의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

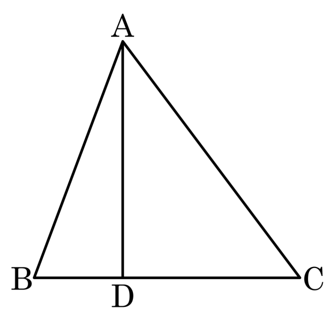
$\overline{AB} \,//\, \overline{DE}$이므로 $\triangle DBE$와 $\triangle AED$ 밑변과 높이가 같다. 따라서 $\triangle DBE = \triangle AED$이다.

$\triangle AEC = \triangle DEC + \triangle AED = \triangle DEC + \triangle DBE$

$= \triangle DBC = 24$

$\therefore\ \triangle ABE = \triangle ABC - \triangle AEC = 30 - 24 = 6$

13. 다음 그림에서 $\overline{BD} : \overline{CD} = 1 : 2$, $\triangle ABC = 9$일 때, $\triangle ABD$의 넓이를 구하여라.



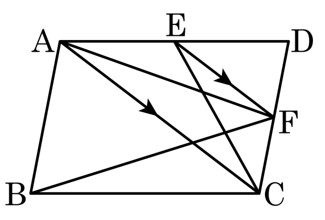
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\triangle ABD = 9 \times \dfrac{1}{1+2} = 3$

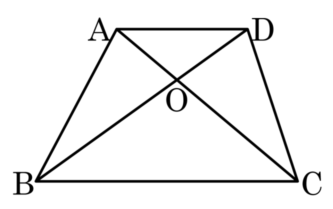
14. 다음 그림의 평행사변형 ABCD 에서 $\overline{AC} \,/\!/\, \overline{EF}$, $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{DC}$ 이고 $\triangle BCF = 34\text{cm}^2$ 일 때, $\triangle ACE$ 의 넓이는?



① 18cm^2 ② 22cm^2 ③ 26cm^2
④ 30cm^2 ⑤ 34cm^2

해설
$\overline{AB} \,/\!/\, \overline{DC}$ 이므로 밑변과 높이가 같고, $\triangle BCF = \triangle ACF$ 이다.
$\overline{AC} \,/\!/\, \overline{EF}$ 이므로 밑변과 높이가 같고, $\triangle ACF = \triangle ACE$ 이다.
$\therefore\ \triangle ACE = 34(\text{cm}^2)$

15. 다음 사다리꼴 ABCD 에서 $\overline{AD}//\overline{BC}$, $\overline{AO}$: $\overline{OC}$ = 1 : 2 이고 $\triangle DOC = 12cm^2$ 이다. 사다리꼴 ABCD 의 넓이는?

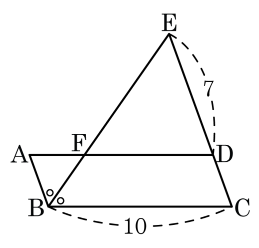


① $32cm^2$ ② $48cm^2$ ③ $54cm^2$
④ $63cm^2$ ⑤ $72cm^2$

해설

$1 : 2 = \triangle AOD : 12cm^2$, $\triangle AOD = 6cm^2$
$\triangle DOC = \triangle AOB = 12cm^2$, $1 : 2 = 12cm^2 : \triangle BOC$, $\triangle BOC = 24cm^2$
$\square ABCD = 6 + 12 + 12 + 24 = 54(\,cm^2)$

16. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD 에서 $\angle B$ 의 이등분선이 $\overline{AD}$ 와 $\overline{CD}$ 의 연장선과 만나는 점을 각각 E , F 일 때, $\overline{CD}$ 의 길이를 구하여라.



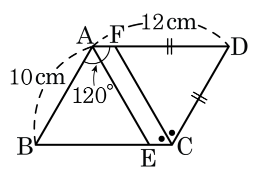
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\overline{CE} \,/\!/\, \overline{AB}$ 이므로 $\angle ABF = \angle CEB$ 이므로 $\triangle EBC$ 는 이등변삼각형이다.
따라서 $\overline{BC} = \overline{EC}$ 이고 $\overline{EC} = 7 + \overline{CD}$, $\overline{CD} = 3$ 이다.

17. 평행사변형 ABCD 에서 $\angle A$, $\angle C$ 의 이등분선이 변 BC, AD 와 만나는 점을 각각 E, F 라고 할 때, $\overline{AD} = 12\,\mathrm{cm}$, $\overline{AB} = 10\,\mathrm{cm}$, $\angle BAD = 120^\circ$ 일 때, □AECF 의 둘레의 길이를 구하여라.



▶ 답: ______ cm

▷ 정답: 24 cm

해설

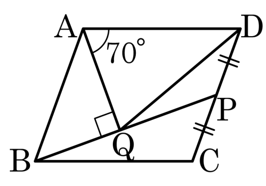
$\triangle FDC$, $\triangle ABE$ 에서 $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{BE} = \overline{FD}$, $\angle ABE = \angle CDF$ 이므로 SAS 합동이고 □AECF 는 평행사변형이다.

또, $\angle BCF = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$ 이므로, $\angle CFD = 60^\circ$ 이다. 따라서 $\triangle FDC$ 와 $\triangle ABE$ 는 정삼각형이다.

$\overline{AF} + \overline{FD} = 12\ (\mathrm{cm})$, $\overline{AF} = 12 - \overline{FD} = 12 - 10 = 2\ (\mathrm{cm})$ 이고 $\overline{FC} = 10\ (\mathrm{cm})$ 이므로

평행사변형 AECF 의 둘레는 $\overline{AF} + \overline{AE} + \overline{EC} + \overline{CF} = 2 + 10 + 2 + 10 = 24\ (\mathrm{cm})$ 이다.

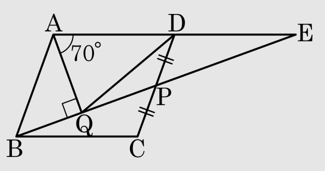
18. 다음은 $\angle AQB = 90°$ 고 $\overline{DP} = \overline{CP}$ 인 평행사변형 ABCD 에서 $\angle DAQ = 70°$ 일때, $\angle DQP$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답 : ______ °

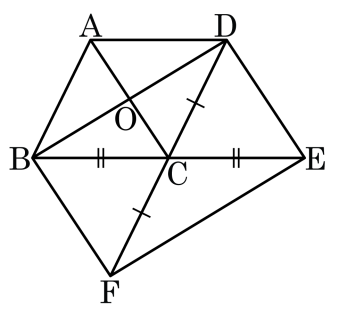
▷ 정답 : 20 °

해설



$\overline{AD}, \overline{BP}$ 의 연장선의 교점을 E 라고 하면
$\triangle BCP \equiv \triangle EDP$(ASA합동)
점 D 는 $\triangle AQE$ 의 외심이 된다.
$\overline{DA} = \overline{DQ} = \overline{DE}$ 이므로
$\angle DQP = 90° - 70° = 20°$

19. 평행사변형 ABCD 의 두 변 BC, DC 의 연장선 위에 $\overline{BC} = \overline{CE}$, $\overline{DC} = \overline{CF}$ 가 되도록 두 점 E, F 를 잡을 때, □ABCD를 제외한 사각형이 평행사변형이 되는 조건은 보기에서 모두 몇 개인가?



보기

㉠ 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.

㉡ 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.

㉢ 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.

㉣ 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.

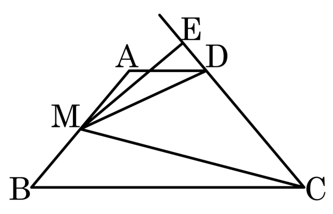
㉤ 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같다.

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

평행사변형이 되는 조건은 □ABFC, □ACED가 평행사변형이되는 조건 ㉤과 □BFED가 평행사변형이 되는 조건 ㉣로 2개이다.

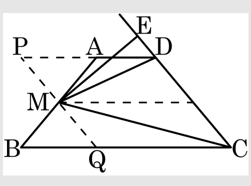
20. 다음 그림과 같은 사다리꼴 ABCD 에서 변 AB 의 중점을 M 이라 하고, 점 M 에서 변 CD 의 연장선에 내린 수선의 발을 E 라 한다. $\triangle CME = 18$, $\triangle EMD = 6$ 일 때, 사다리꼴 ABCD 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설



위의 그림과 같이 점 M 을 지나고 선분 CD 에 평행한 선분 PQ 를 그으면

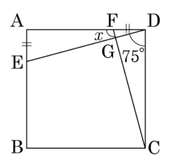
$\triangle PMA \equiv \triangle MBQ$ (ASA 합동)

따라서 □ABCD 의 넓이는 □PQCD 의 넓이와 같다.

$$\begin{aligned}\square PQCD &= 2\triangle DMC \\ &= 2(\triangle CME - \triangle EMD) \\ &= 24\end{aligned}$$

따라서 사다리꼴 ABCD 의 넓이는 24 이다.

21. 다음 그림에서 □ABCD 는 정사각형이다. $\overline{AE} = \overline{FD}$, $\angle CDG = 75°$ 일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답 : _°_

▷ 정답 : 105_°_

해설

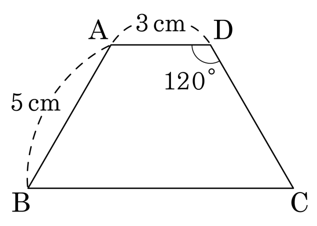
$\triangle ADE$ 와 $\triangle DCF$ 에서 $\overline{AD} = \overline{CD}$, $\overline{AE} = \overline{FD}$ 이고 $\angle A = \angle D = 90°$ 이므로 $\triangle ADE \equiv \triangle DCF$(SAS 합동)

$\angle EDA = \angle FCD = 15°$ 이다.

$\angle DEA = 75°$, $\angle EGF = \angle CGD = 180° - 15° - 75° = 90°$ 이므로

$\angle x = 360° - 90° - 90° - 75° = 105°$ 이다.

22. 다음 그림과 같이 $\overline{AD}//\overline{BC}$인 등변사다리꼴 ABCD에서 $\angle D=120°$일 때, □ABCD의 둘레의 길이를 구하여라.

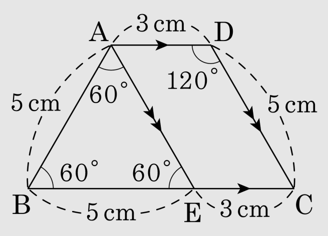


▶ 답: ______ cm

▷ 정답: 21 cm

해설

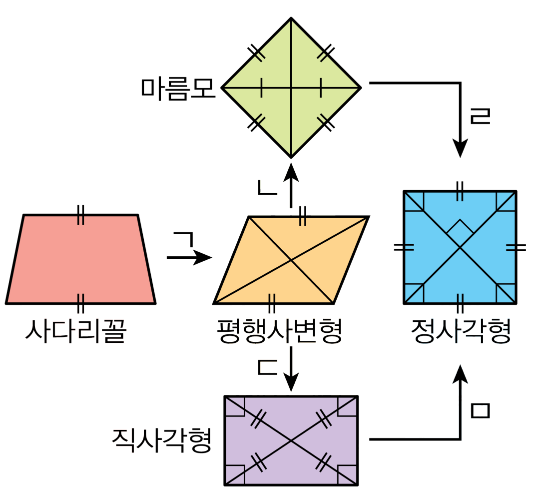
다음 그림과 같이 $\overline{AE}//\overline{DC}$가 되도록 변 BC 위에 점 E를 잡으면 □AECD는 평행사변형이고 △ABE는 정삼각형이다.



$\overline{BE}=\overline{AB}=5\,\text{cm}$이고
$\overline{EC}=\overline{AD}=3\,\text{cm}$이므로
$\overline{BC}=5+3=8(\text{cm})$

$\therefore$ (□ABCD의 둘레의 길이)
$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$
$=5+8+5+3$
$=21(\text{cm})$

23. 다음 그림은 사각형들 사이의 포함 관계를 나타낸 것이다. ㄱ~ㅁ 중 각 도형이 되기 위한 조건으로 옳지 않은 것은?



① ㄱ. 다른 한 쌍의 대변도 평행하다.

② ㄴ. 두 대각선이 직교한다.

③ ㄷ. 이웃한 두 변의 길이가 같다.

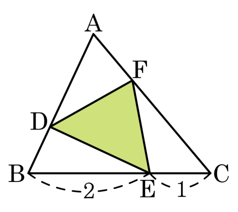
④ ㄹ. 한 내각의 크기가 90° 이다.

⑤ ㅁ. 이웃한 두 변의 길이가 같다.

해설

평행사변형이 직사각형이 되려면 한 내각의 크기가 90° 이거나 두 대각선의 길이가 같으면 된다.

24. $\triangle$ABC 에서 점 D, E, F 는 각 변을 2 : 1 로 내분하는 점이다. $\triangle\mathrm{ADF} = 4\,\mathrm{cm}^2$ 일 때, $\triangle$DEF 의 넓이는?



① $\frac{8}{9}\,\mathrm{cm}^2$ ② $\frac{32}{9}\,\mathrm{cm}^2$ ③ $\frac{46}{9}\,\mathrm{cm}^2$

④ $6\,\mathrm{cm}^2$ ⑤ $8\,\mathrm{cm}^2$

해설

$\triangle\mathrm{ADF} = \frac{2}{3}\triangle\mathrm{FAB} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\right) = \frac{2}{9}\triangle\mathrm{ABC}$

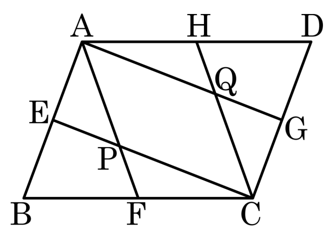
마찬가지 방법으로 $\triangle\mathrm{BDE} = \triangle\mathrm{CEF} = \frac{2}{9}\triangle\mathrm{ABC}$

따라서 $\triangle\mathrm{DEF} = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$

그런데 $\triangle\mathrm{ADF} = 4\,\mathrm{cm}^2$ 이므로 $\triangle\mathrm{ABC} = 18\,\mathrm{cm}^2$

$\triangle\mathrm{DEF} = 6\,\mathrm{cm}^2$

25. 다음은 평행사변형 ABCD의 각 변의 중점을 각각 E, F, G, H라 하고 $\overline{AF}$와 $\overline{CE}$의 교점을 P, $\overline{AG}$와 $\overline{CH}$의 교점을 Q라 할 때, □APCQ는 평행사변형임을 증명하는 과정이다. ㄱ, ㄴ에 알맞은 것을 써 넣으면?



□AFCH에서
$\overline{AH} // \overline{FC}$, $\overline{AH} = \overline{FC}$이므로
□AFCH 는 평행사변형
$\overline{AF} // \overline{HC}$
$\boxed{\text{ㄱ}}$ ⋯ ㉠
□AECG에서
$\overline{AE} // \overline{GC}$, $\overline{AE} = \overline{GC}$이므로
□AECG는 평행사변형
$\overline{AG} // \overline{EC}$
즉, $\boxed{\text{ㄴ}}$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 □APCQ는 평행사변형이다.

① ㄱ : $\overline{AB} // \overline{DC}$, ㄴ : $\overline{AQ} = \overline{PC}$

② ㄱ : $\overline{AP} = \overline{QC}$, ㄴ : $\overline{AQ} = \overline{PC}$

③ ㄱ : $\overline{AE} = \overline{EB}$, ㄴ : $\overline{AD} // \overline{CB}$

④ ㄱ : $\overline{AP} // \overline{QC}$, ㄴ : $\overline{AQ} // \overline{PC}$

⑤ ㄱ : $\overline{AF} = \overline{CH}$, ㄴ : $\overline{AH} // \overline{FC}$

해설

$\overline{AF} // \overline{HC}$ 이므로 $\overline{AP} // \overline{QC}$ 이고, $\overline{AG} // \overline{EC}$ 이므로 $\overline{AQ} // \overline{PC}$ 이다.