1. 방정식 $|x+5|=1$를 만족하는 x의 값들의 합은?

① -9 ② -10 ③ -11 ④ -12 ⑤ -13

해설

$|x+5|=1$

$\Rightarrow \quad x+5=1$ 또는 $x+5=-1$

$\therefore \quad x=-4$ 또는 $x=-6$

2. 이차방정식 $x^2 - 2x + k + 2 = 0$이 중근을 가지도록 하는 상수 k의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 0 ④ -2 ⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + (k+2) = 0$

$\frac{D}{4} = (-1)^3 - (k+2) = 0$

$1 - k - 2 = 0 \quad \therefore \ k = -1$

3. 다음 이차함수 중 최솟값을 갖는 것은?

① $y = -3x^2$
② $y = -x^2 + 2x + 1$
③ $y = -2(x-1)^2$
④ $y = (x+1)^2 + 3$
⑤ $y = 3 - x^2$

해설

이차함수에서 이차항의 계수가 양수이면 꼭짓점이 최솟값을 가지고, 음수이면 꼭짓점이 최댓값을 갖는다.

4. 이차함수$y = -2 + 3x - x^2$ $(-1 \le x \le 2)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $-\frac{23}{4}$ ② $-\frac{16}{3}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$y = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}$ 이므로

$x = \frac{3}{2}$ 가 x의 값의 범위 $-1 \le x \le 2$ 에 포함되므로

$x = \frac{3}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$ 를 갖고,

$x = -1$ 에서 최댓값 -6을 갖는다.

따라서 최솟값과 최댓값의 합은 $-\frac{23}{4}$ 이다.

5. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2
② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1
③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2
④ $x = -1$, $\frac{1}{2}$, 2 (중근)
⑤ $x = -1$, $\frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

	2	−1	−6	−1	2
−1		−2	3	3	−2
	2	−3	−3	2	0
2		4	2	−2	
	2	1	−1	0	

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(2x^2 + x - 1) = 0$

$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ \frac{1}{2},\ 2$

6. 연립방정식 $ax+by=8$, $2ax-by=-2$의 근이 $x=1$, $y=2$일 때, a, b의 값은?

① $a=-2,\ b=-3$
② $a=3,\ b=2$
③ $a=2,\ b=-3$
④ $a=2,\ b=3$
⑤ $a=-3,\ b=-2$

해설

$ax+by=8$, $2ax-by=-2$
근이 $x=1, y=2$이므로

$$\begin{cases} a+2b=8 \\ 2a-2b=-2 \end{cases}$$

$\therefore\ a=2, b=3$

7. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$
$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$
순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로
$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$
(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$
(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$
$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$
따라서 (i), (ii) 에 의하여 $x=-1$

8. $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$ 일 때, $z_1^3 + z_2^3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4 - 2i$　　② 0　　③ 20

④ $-2 + 4i$　　⑤ -4

해설

$z_1 + z_2 = 2,\ z_1 z_2 = 2$

$$\begin{aligned} z_1^3 + z_2^3 &= (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2) \\ &= 8 - 12 \\ &= -4 \end{aligned}$$

9. 제곱해서 $5-12i$ 가 되는 복소수는?

① $\pm(2+3i)$ ② $\pm(2-3i)$ ③ $\pm(3-2i)$
④ $\pm(3+3i)$ ⑤ $\pm(3+3i)$

해설

구하려는 복소수를 $a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면
$(a+bi)^2 = a^2-b^2+2abi$ 에서
$a^2-b^2+2abi = 5-12i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a^2-b^2=5$, $2ab=-12$ 에서
$ab=-6$, $b=-\frac{6}{a}$ 이므로
$a^2-\left(-\frac{6}{a}\right)^2=5$, $a^2-\frac{36}{a^2}=5$
양변에 a^2 을 곱하면
$a^4-5a^2-36=0$, $(a^2-9)(a^2+4)=0$
따라서 $a^2=9$ 또는 $a^2=-4$ 이므로
$a=\pm3$ 또는 $a=\pm2i$
그런데 a 는 실수이므로 $a=\pm3$ 이고, $b=\mp2$ 이다.
따라서 구하는 복소수는 $\pm(3-2i)$ 이다.

10. 두 다항식 $A,\ B$ 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$, $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2,\ B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2,\ B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2,\ B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2,\ B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6,\ B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$ ㉠
$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$ ㉡
(㉠ + ㉡) ÷ 3 : $A=x^3-x^2+x+2$
(2㉠ − ㉡) ÷ 3 : $B=-2x^3-x^2+3x+3$

11. 상수 a, b에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, $2a+b$의 값은?

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}=\frac{6(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

① 2　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

등식이 항상 성립하기 위해서는 (분모) $\neq 0$이어야 한다.
양변에 공통분모인 $(x-1)(x+3)$을 곱하면,
$a(x+3)+b(x-1)=6(x+1)$
$(a+b)x+(3a-b)=6x+6$
$\therefore\ a+b=6,\ 3a-b=6$
두 식을 연립하여 풀면,
$a=3,\ b=6-a=3$
$\therefore\ 2a+b=2\times 3+3=9$

12. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $2x^3-3x^2-x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 가 성립할 때, $a+b+c+d$ 의 값은? (단, a,b,c,d 는 상수)

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 3　　⑤ 5

해설

계수의 합 $a+b+c+d$ 를 구할 때는 우변의 문자부분을 모두 1 이 되게 하는 x 값을 양변에 대입하면 간단하게 그 값을 구할 수 있다.
이 문제에서는 $x=2$ 를 양변에 대입하면
$16-12-2+1=a+b+c+d$
$\therefore\ a+b+c+d=3$

해설

a,b,c,d 의 값을 각각 구하기 위해서는 아래와 같이 조립제법을 사용할 수 있다.
$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$
$=(x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c]+d$
즉, $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d,c,b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

1	2	−3	−1	1	
		2	−1	−2	
1	2	−1	−2	−1	← d
		2	1		
1	2	1	−1	← c	
		2			
	2	3	← b		
	↑				
	a				

$\therefore\ a+b+c+d=3$

13. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때, 나머지가 3 이고, 다항식 $f(x+2)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $ax+4$ 이다. 이때, 상수 a 의 값을 구하는 과정을 나타낸 것이다. (　　) 안에 알맞지 않은 것을 고르면?

> 풀이) $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 3 이므로 (ⓐ) 이다.
> $f(x+2)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 (ⓑ) $\cdots$ (㉠)
> (㉠) 은 x 에 대한 항등식이므로 $x=-1$ 을 대입하면 (ⓒ) 이다.
> 따라서 (ⓓ) 에서 (ⓔ) 이다.

① ⓐ $f(1)=3$

② ⓑ $f(x+2)=(x+1)^2Q(x)+ax+4$

③ ⓒ $f(-1)=-a+4$

④ ⓓ $-a+4=3$

⑤ ⓔ $a=1$

해설

㉠에 $x=-1$ 를 대입하면 $f(1)=-a+4$

14. 두 다항식 $f(x) = x^2 + x + a$, $g(x) = 2x^2 + bx - 1$의 최대공약수가 $x - 1$일 때, 두 다항식의 최소공배수를 구하면?

① $(x-1)(x-2)(2x-1)$
② $(x-1)(x+1)(2x-1)$
③ $(x-1)(x+2)(2x+1)$
④ $(x-1)(x+2)(x+3)$
⑤ $(x-1)(x+2)(x-2)$

해설

$f(1) = 0, 1 + 1 + 0 = a \ \therefore \ a = -2$
$g(1) = 0, 2 + b - 1 = 0 \ \therefore \ b = -1$
$\therefore \ f(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$
$g(x) = 2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$
$\therefore$ 최소공배수 : $(x-1)(x+2)(2x+1)$

15. 합이 $2x^3+x^2-5x+2$이고, 최소공배수가 x^4-3x^2+2x인 두 식을 $f(x), g(x)$라 할 때, $f(2)\times g(2)$의 값을 구하면?

① 12　② 22　③ 26　④ 32　⑤ 36

해설

$f(x)=Ga,\ g(x)=Gb$ (단, a, b : 서로소)

$f(x)+g(x)=G(a+b)$

$=(x-1)(x+2)(2x-1)\cdots$ ㉠

$L=Gab=x(x-1)^2(x+2)$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a+b$와 ab가 서로소이므로

$G=(x-1)(x+2)$

$\therefore f(x)g(x)=LG=x(x-1)^2(x+2)(x-1)(x+2)=x(x-1)^3(x+2)^2$

$\therefore\ f(2)g(2)=32$

16. x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+6=0$의 두 근 $a,\ b$에 대하여 $|a-b|=1$이 성립할 때, $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}$의 값은? (단, $m<0$)

① $-1-\sqrt{2}$　② $2+\sqrt{3}$　③ $2-\sqrt{3}$
④ $1+\sqrt{2}$　⑤ $-2+\sqrt{5}$

해설

$x^2+mx+6=0$의 두 근이 $a,\ b$
$a+b=-m,\ ab=6$
$|a-b|=1$
$|a-b|^2=(a+b)^2-4ab$
$=m^2-24=1$
$m^2=25\ \therefore\ m=-5(\because\ m<0)$
$x^2-5x+6=0$
$(x-3)(x-2)=0$
$a=3,\ b=2$
$\therefore\ \sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$

17. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$$
$$y = x + 1$$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m의 범위를 정하여라.

① $m < -2,\quad m > \frac{2}{3}$
② $m < -1,\quad m > \frac{2}{3}$
③ $m < -2,\quad m > 2$
④ $m < 2,\quad m > \frac{2}{3}$
⑤ $m < -5,\quad m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$을 항상 만족시키도록 m을 정하면 된다.
$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$에서 판별식
$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0,$
$(m - 2 + 2m)(m - 2 - 2m) < 0$
$(3m-2)(m+2) > 0$
$\therefore\quad m < -2\ ,\ m > \frac{2}{3}$

18. $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$ 와 $y = x$ 의 두 교점이 원점에 관하여 대칭이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 4　　② 2　　③ −4　　④ −2　　⑤ 3

해설

$y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$

$y = x$ 의 교점은 $x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2 = x$

$x^2 - (a^2 - 4a + 4)x + a^2 + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라면

두 근이 원점에 대칭이므로 중점은 원점이다.

$\therefore \ \dfrac{\alpha + \beta}{2} = \dfrac{(a-2)^2}{2} = 0$

$\therefore \ a = 2$

19. 이차함수 $y = 3x^2 + a(2+b)x - 4$는 축의 방정식이 $x = 2$ 이고, 최솟값은 b 이다. 이때, 상수 a , b 의 곱 ab 의 값을 구하면?

① $-\frac{9}{7}$ ② $\frac{6}{7}$ ③ 30 ④ $-\frac{16}{7}$ ⑤ $-\frac{96}{7}$

해설

$$\begin{aligned} y &= 3(x-2)^2 + b \\ &= 3(x^2 - 4x + 4) + b \\ &= 3x^2 - 12x + 12 + b \end{aligned}$$

$12 + b = -4 \therefore b = -16$

$2a + ab = 2a - 16a = -12$

$-14a = -12$

$\therefore a = \frac{6}{7}$

$\therefore ab = \frac{6}{7} \times (-16) = -\frac{96}{7}$

20. $P=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$　② $2^{32}+1$　③ $2^{31}-1$
④ $2^{31}+1$　⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 값은 변하지 않으므로

$$\begin{aligned} P &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1) \\ &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= \quad \vdots \\ &= (2^{16}-1)(2^{16}+1) \\ &= 2^{32}-1 \end{aligned}$$