1. 다음 보기에 주어진 수를 x라 할 때, $\sqrt{x}$가 허수가 되는 x의 개수는?

$$-2,\ \frac{1}{3},\ 0,\ -3.5,\ 4,\ -\frac{2}{5}$$

① 1 개 ② 3 개 ③ 5 개 ④ 7 개 ⑤ 9 개

해설

$\sqrt{x}$가 허수가 되는 $x = -2,\ -3.5,\ -\frac{2}{5}$의 3개이다.

2. $(2+\sqrt{3}i)^2+(2-\sqrt{3}i)^2$ 의 값은?

① $8\sqrt{3}i$ ② $4\sqrt{3}i$ ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

$$(2+\sqrt{3}i)^2+(2-\sqrt{3}i)^2$$
$$=(4+4\sqrt{3}i+3i^2)+(4-4\sqrt{3}i+3i^2)$$
$$=1+4\sqrt{3}i+1-4\sqrt{3}i=2$$

3. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=-\sqrt{12}$

② $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=\sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3}\times\sqrt{4}=-\sqrt{12}$

④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=-\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}}=-\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

해설

② $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=\sqrt{3}i\times\sqrt{4}i=-\sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3}\times\sqrt{4}=\sqrt{3}i\times\sqrt{4}=\sqrt{12}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}i$

4. 이차방정식 $x^2 - 2x + m = 0$이 허근을 가질 때, 실수 m의 범위를 구하면?

① $m < 1$

② $-1 < m < 1$

③ $m < -1$ 또는 $m > 1$

④ $m > 1$

⑤ $m > -1$

해설

주어진 이차방정식이 허근을 가지려면

$D/4 = 1 - m < 0$

$\therefore m > 1$

5. 이차방정식 $2x^2-4x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 11

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\ &= 8-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2=11\end{aligned}$$

6. 이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 최댓값 또는 최솟값과 그 때의 x 의 값은?

① $x = 2$ 일 때, 최댓값은 4

② $x = -2$ 일 때, 최댓값은 4

③ $x = 4$ 일 때, 최댓값은 4

④ $x = 2$ 일 때, 최솟값은 4

⑤ $x = 4$ 일 때, 최솟값은 0

해설

$$y = -x^2 + 4x$$
$$= -(x-2)^2 + 4$$

따라서 $x = 2$ 일 때, 최댓값 4를 갖는다.

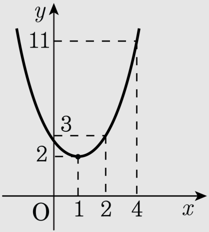
7. $2 \le x \le 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

따라서 함수의 그래프는 점$(1, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로



(i) $x = 2$ 일 때 최소이며, 최솟값은 $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$

$\therefore \ m = 3$

(ii) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$\therefore \ M = 11$

$\therefore \ M + m = 14$

8. 사차방정식 $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$의 근 중에서 최대의 근은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 6 ⑤ 2

해설

$x^4+x^3-7x^2-x+6=0$ 에서

$x=1,\ x=-1$을 대입하면 성립하므로

$x^4+x^3-7x^2-x+6$

$=(x-1)(x+1)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x+1)(x+3)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-3,\ -1,\ 1,\ 2$

따라서 최대의 근은 2

9. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$
② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$
③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$
④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$
⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

10. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=6$, $abc=-1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^3+2(ab+bc+ca)$

$ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=2\times(6-(-1))-3=11$

11. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x-1$로 나누면 나누어떨어지고, $x+2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, $m-n$의 값은?

① -2　② -3　③ -4　④ 2　⑤ 4

해설

$$x^3+mx^2+nx+1=(x-1)\,Q(x)$$
$$=(x+2)\,Q'(x)+3$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+m+n+1=0$

$\therefore m+n=-2\cdots$㉠

양변에 $x=-2$을 대입하면

$-8+4m-2n+1=3$

$\therefore 2m-n=5\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $m=1, n=-3$

$\therefore m-n=4$

12. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -4이다. 이때, $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q_1(x)+5 \\ &= (x+2)Q_2(x)-4 \\ &= (x-1)(x+2)Q_3(x)+R(x) \end{aligned}$$

$R(x)=ax+b$ 라 하면

$f(1)=5$이므로

$R(1)=a+b=5\cdots$①

$f(-2)=-4$이므로

$R(-2)=-2a+b=-4\cdots$②

①, ②에 의해 $a=3,\ b=2$이다.

$\therefore\ R(x)=3x+2 \Rightarrow R(2)=8$

13. x 에 대한 항등식 $x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 를 만족하는 상수 a, b, c, d 의 곱 $abcd$ 의 값은?

① -2　　② 0　　③ 5　　④ 10　　⑤ 18

해설

$a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$
$= (x+1)[(x+1)\{a(x+1)+b\}+c]+d$ 임을 이용하여 조립제법을 사용하면

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & \\
 & & -1 & 1 & -1 & \\ \hline
-1 & 1 & -1 & 1 & \boxed{-2} & \leftarrow \ \mathrm{d} \\
 & & -1 & 2 & & \\ \hline
-1 & 1 & -2 & \boxed{3} & \leftarrow & \mathrm{c} \\
 & & -1 & & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{-3} & \leftarrow \mathrm{b} & & \\
 & \uparrow & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ abcd = 1 \times (-3) \times 3 \times (-2) = 18$

14. x에 대한 두 다항식 $A = x^3 + ax^2 + bx$와 $B = x^2 + bx + a$의 최대공약수가 일차식이다. 그 최대공약수를 구하면? (단, a, b는 상수이고 $ab \neq 0$)

① $x-1$ ② $x-2$ ③ $x+1$ ④ $x+2$ ⑤ $x+3$

해설

$A(x) = x(x^2 + ax + b)$, $B(x) = x^2 + bx + a$

인수를 $(x-p)$로 놓으면

$A(p) = 0$에서 $p^3 + ap^2 + bp = 0 \cdots$ ㉠

$B(p) = 0$에서 $p^2 + bp + a = 0 \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ $\times\, p$에서 $(a-b)p^2 + (b-a)p = 0$

$\therefore\ (a-b)p(p-1) = 0$

그런데 $a \neq 0$이므로 $p \neq 0$

$\therefore\ p = 1$

따라서 최대공약수는 $x-1$

15. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$이고, 최소공배수가 x^3+x^2-2x일 때, 두 이차식의 합을 구하면?

① $2x^2-1$　② $2x^2-2$　③ $2x^2-3$

④ $2x^2+1$　⑤ $2x^2+2$

해설

두 다항식은 $(x-1)a, (x-1)b$ (a, b는 서로소)

$x^3+x^2-2x=(x-1)ab=x(x+2)(x-1)$

두 다항식은 $x(x-1), (x+2)(x-1)$

$\therefore$ 두식의 합은 $2x^2-2$

16. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근의 공식을 유도하는 과정이다. (가), (나), (다) 에 알맞은 식을 차례대로 쓰면?

$$ax^2+bx+c=0 \leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$\leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+(\quad)=-\frac{c}{a}+(\text{ 가 })$$
$$\leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{(\text{ 나 })}{4a^2}$$
$$\leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{(\text{ 다 })}{2a}$$

① $\frac{b^2}{4a^2}$, b^2-4ac, $\pm\sqrt{b^2-4ac}$
② $\frac{b}{2a}$, $\sqrt{b^2-4ac}$, b^2-4ac
③ $\frac{b}{2a}$, b^2-4ac, $\pm\sqrt{b^2-4ac}$
④ $\frac{b^2}{4a^2}$, $\sqrt{b^2-4ac}$, b^2-4ac
⑤ $\frac{b}{a}$, $\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$, $\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}$

해설

(가) 좌변을 제곱 꼴로 만들려 하는 것이므로 $(x+\frac{b}{2a})^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$

(나) $-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

(다) $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

17. x 에 대한 두 이차방정식

$x^2 - 2\sqrt{b}x + (2a+1) = 0 \cdots$ ㉠

$x^2 - 2ax - b = 0 \cdots$ ㉡가 있다. ㉠이 서로 다른 두 실근을 가질 때, ㉡의 근을 판별하면? (단, a, b 는 실수이고, $b \geq 0$)

① 서로 다른 두 실근을 가진다.

② 중근을 가진다.

③ 서로 다른 두 허근을 가진다.

④ 판별할 수 없다.

⑤ 한 개의 실근과 한 개의 허근을 가진다.

해설

㉠의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = b - (2a+1) > 0 \therefore \ b > 2a+1$$

㉡의 판별식을 D' 이라 하면

$$\frac{D'}{4} = a^2 + b > a^2 + 2a + 1$$

$$= (a+1)^2 \geq 0$$

$$\therefore \ \frac{D'}{4} > 0$$

따라서, ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

18. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 x 축과 두 점 $(2,\ 0),\ (8,\ 0)$ 에서 만나고 최솟값이 -9 이다. 이 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ x 축과 두 점 $(p, 0), (q, 0)$ 에서 만나는 $\overline{pq}$ 의 길이를 이등분한 점이 축의 방정식이 된다.

해설

$$y = a(x-2)(x-8)$$
$$= a(x^2 - 10x + 16)$$
$$= a(x-5)^2 - 9a$$
$$-9a = -9$$
$$\therefore a = 1$$
$$y = x^2 - 10x + 16$$
$$b = -10\ ,\ c = 16$$
$$\therefore\ a + b + c = 1 + (-10) + 16 = 7$$

19. $x-y=1$ 이고 $x^2+y^2=-1$ 일 때, $x^{10}+y^{13}$ 의 값은 얼마인가?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$x-y=1$ 에서 $y=x-1$

이것을 $x^2+y^2=-1$ 에 대입하면

$2x^2-2x+2=0$

$x^2-x+1=0$

양변에 $x+1$ 을 곱하면, $x^3+1=0$

$\therefore\ x^3=-1$

또 $x=y+1$ 을 $x^2+y^2=-1$ 에 대입하면

$2y^2+2y+2=0,\ y^2+y+1=0\ \therefore\ y^3=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^{10}+y^{13}&=(x^3)^3\cdot x+(y^3)^4\cdot y\\&=(-1)^3\cdot x+1^4\cdot y\\&=-(x-y)=-1\end{aligned}$$

20. $a^3+b^3+c^3=p(a+b+c)^3+q(a+b+c)(ab+bc+ca)+rabc$가 a, b, c에 대한 항등식이 되도록 상수 p, q, r의 값을 정할 때, $p+q+r$을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ -23　⑤ 23

해설

$a^3+b^3+c^3=p(a+b+c)^3+q(ab+bc+ca)+rabc$에서 a, b, c에 대한 항등식이므로

$a=1, b=0, c=0 : 1=p \cdots$ ①

$a=1, b=1, c=0 : 2=2p+2q \cdots$ ②

$a=1, b=1, c=1 : 3=27p+9q+r \cdots$ ③

①, ②, ③에서 $p=1$, $q=0$, $r=-24$

$\therefore\ p+q+r=-23$