1. 이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$D = (a+2)^2 - 4 = 0$이므로
$a^2 + 4a + 4 - 4 = a^2 + 4a = 0$
따라서 $a = 0$ 또는 $a = -4$
따라서 상수 a의 값의 합은 -4

2. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a+3)x + a^2 + 7 = 0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \geq 0$ ② $-1 < a < 0$ ③ $-2 < a < 0$

④ $a \geq -\frac{1}{3}$ ⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2+7) \geq 0$

$a^2 + 6a + 9 - a^2 - 7 \geq 0$

$6a + 2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$

3. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + b - 3 = 0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a = 1, b = 2$ ② $a = 0, b = 3$ ③ $a = -1, b = 2$

④ $a = 0, b = 2$ ⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.

$D' = (k-a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$

$\Rightarrow \quad -2ak + a^2 - b + 3 = 0$

모든 k 에 대해 성립하려면

$-2a = 0, \ a^2 - b + 3 = 0$

$\therefore \quad a = 0, b = 3$

4. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2=b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2+2x+3=0$ 를 완전제곱식으로 고치면

$(x^2+2x+1)+2=0, \quad (x+1)^2=-2$

$\therefore a=1,\ b=-2$

$\therefore a-b=3$

5. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 의 값은?

① -5 ② -4 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계를 이용하면,

$\alpha+\beta=-3 \quad \alpha\beta=1$

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$

$=-3+2=-1$

6. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3 ② 0 ③ 2

④ 4 ⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

7. 방정식 $|x|+|x-1|=9$ 의 모든 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -20

해설

$|x|+|x-1|=9$ 에서

i) $x<0$ 일 때,

$-x-x+1=9$

$\therefore\ x=-4$

ii) $0\le x<1$ 일 때,

$x-x+1=9$(성립하지 않음)

iii) $x\ge 1$ 일 때,

$x+x-1=9$

$\therefore\ x=5$

따라서 모든 근의 곱은

$(-4)\times 5=-20$

8. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k = 1$ 이면 중근을 갖는다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉣　　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$

㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>

㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 중근을 갖는다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉣ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1 + k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1+k} = ai (a \neq 1)$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.

9. 이차방정식 $(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=p+qi$이다. 이 때, $a+p+q$의 값을 구하여라. (단, $a,\ p,\ q$는 실수)

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(-3+i)x+2(1+i)=0$

$2x^2-2(2+i)x+2(1+i)=0$

$x^2-(2+i)x+1+i=0$

$(x-1)\left\{x-(1+i)\right\}=0$

$x=1$ 또는 $x=1+i$

$\therefore a+p+q=3$

10. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근의 공식을 유도하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 식을 차례대로 쓰면?

$$ax^2+bx+c=0 \leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$\leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+(\quad)=-\frac{c}{a}+(\text{ 가 })$$
$$\leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{(\text{ 나 })}{4a^2}$$
$$\leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{(\text{ 다 })}{2a}$$

① $\frac{b^2}{4a^2}$, b^2-4ac, $\pm\sqrt{b^2-4ac}$
② $\frac{b}{2a}$, $\sqrt{b^2-4ac}$, b^2-4ac
③ $\frac{b}{2a}$, b^2-4ac, $\pm\sqrt{b^2-4ac}$
④ $\frac{b^2}{4a^2}$, $\sqrt{b^2-4ac}$, b^2-4ac
⑤ $\frac{b}{a}$, $\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$, $\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}$

해설

(가) 좌변을 제곱 꼴로 만들려 하는 것이므로 $(x+\frac{b}{2a})^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$

(나) $-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

(다) $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

11. $|x+1|+|x-2|=x+3$을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

i) $x<-1$일 때,
$-x-1-x+2=x+3$
$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ (모순)
ii) $-1\le x<2$일 때,
$x+1-x+2=x+3$
$\therefore\ x=0$
iii) $x\ge 2$일 때,
$x+1+x-2=x+3$
$\therefore\ x=4$

12. 실수 a, b에 대하여 연산$*$를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x-6) = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha + 2\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x * (x-6) = 0$ 에서
$x^2 + x - 6 = 0$
$(x+3)(x-2) = 0$
$\therefore\ x = -3,\ 2$
$\therefore\ \alpha = -3,\ \beta = 2\ (\alpha < \beta)$
$\therefore \alpha + 2\beta = 1$

13. x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이 되도록 유리수 p, q를 정할 때, $p+q$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 1 ⑤ 2

해설

유리계수 이차식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면,
그 켤레근인 $2-\sqrt{3}$도 방정식의 근이므로
근과 계수와의 관계에 의해서
$-p=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$
$\therefore\ p=-4$
$q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$
$\therefore\ q=1$
$\therefore\ p+q=-4+1=-3$

14. 이차방정식 $x^2+2x-a=0$의 해가 3 또는 b라 할 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 8　　② 10　　③ 12　　④ 14　　⑤ 16

해설

$x=3$이 $x^2+2x+a=0$의 근이므로
$3^2+2\cdot 3-A=0 \quad \therefore a=15$
$\therefore a=15$를 주어진 방정식에 대입하면
$x^2+2x-15=0,\ (x+5)(x-3)=0$
따라서 $x=-5$ 또는 $x=3$이므로 $b=-5$
$\therefore a+b=15+(-5)=10$

15. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot2+12=9$

16. x에 관한 이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가질 때 $x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$의 근을 판별하면?

① 중근　　② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근　　④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가지려면
$D'=4+a-b=0$
$\therefore b=a+4$
$x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$
$x^2-2(a-1)x+a^2-2a+16=0$
$D'=(a-1)^2-(a^2-2a+16)=-15<0$
$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

17. 이차방정식 $x^2-5x+p=0$의 두 근은 $3, \alpha$이고 $x^2-px+q=0$의 두 근은 α, β이다. 이 때 β의 값은?(단 p, q는 상수)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

이차방정식 $x^2-5x+p=0$에서
근과 계수의 관계에 의해
두 근의 합 : $3+\alpha=5 \quad \therefore \alpha=2$
두 근의 곱 : $3\cdot\alpha=p=3\cdot 2=6$
이차방정식 $x^2-6x+q=0$의 두 근이 $2, \beta$이므로
$2+\beta=6 \quad \therefore \beta=4$

18. 이차식 $x^2-xy-2y^2-ax-3y-1$ 이 $x,\ y$ 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

해설

(주어진 식)$=0$이라 놓고 x에 관하여 정리하면

$x^2-(a+y)x-(2y^2+3y+1)=0$

근의 공식에서

$$x=\frac{a+y\pm\sqrt{(a+y)^2+4(2y^2+3y+1)}}{2}$$

$$=\frac{a+y\pm\sqrt{9y^2+2(a+6)y+a^2+4}}{2}$$

주어진 식이 $x,\ y$에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식$(=D)$ 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D=9y^2+2(a+6)y+a^2+4$의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4}=(a+6)^2-9(a^2+4)=-8a^2+12a=0$$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

19. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, a, b, c, p, q 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 판별식은 b^2-4ac 이다.

㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.

㉢ $a<0$, $c<0$ 이면 허근만 갖는다.

㉣ $a>0$, $c<0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.

㉥ 한 근이 $p+qi$ 이면 다른 한 근은 $q-pi$ 이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a, b, c 가 실수이므로 판별식 사용 가능(참)

㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)

㉢ b^2-4ac 에서 $ac>0$ 이다.
하지만 $b^2<4ac$ 인 경우만 허근을 가짐(거짓)

㉣ 판별식 b^2-4ac 에서 $ac<0$ 이므로 $b^2-4ac>0$ (참)

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)

㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p+qi$ 이면 $p-qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

20. α, β를 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$(단, $ac \neq 0$) 의 두 근이라 할 때, 다음 중 $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 을 두 근으로 가지는 이차방정식은?

① $a^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + c^2 = 0$

② $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x - c^2 = 0$

③ $c^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + a^2 = 0$

④ $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

⑤ $c^2x^2 + (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

해설

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

따라서, 구하는 이차방정식은

$$x^2 - \frac{(b^2 - 2ac)}{c^2}x + \frac{a^2}{c^2} = 0$$

즉, $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

21. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

(가) 를 계수로 갖는 이차방정식은 (나) 의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다) 를 계수로 갖는 이차식 $ax^2 + bx + c$ 는 (라) 의 범위에서는 반드시 (마) 의 곱으로 인수분해된다.

① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식

② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식

③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

22. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(m-2)x + 2m - 1 = 0$의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $m > 5$　　② $m \geq 5$　　③ $m < 5$

④ $m \leq 5$　　⑤ $-5 \leq x \leq 5$

해설

주어진 이차방정식이 두 실근을 가져야 하므로
$D/4 = (m-2)^2 - 2m + 1 \geq 0$
즉 $m^2 - 4m + 4 - 2m + 1 = m^2 - 6m + 5 \geq 0$
따라서 $(m-5)(m-1) \geq 0$이므로
$m \leq 1$ 또는 $m \geq 5$
또 두근의 합 $-2(m-2) < 0$이어야 하므로 $m > 2$
또 두근의 곱 $2m - 1 > 0$이어야 하므로 $m > \frac{1}{2}$
따라서 $m \geq 5$

23. x에 대한 이차방정식 $x^2-(k^2-3k-4)x+2-k=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, α는 양수이고 β는 음수이다. β의 절댓값이 α의 절댓값보다 클 때, 정수 k의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

(두 근의 합) $= k^2-3k-4=(k-4)(k+1)<0$

$-1<k<4$

(두 근의 곱) $= 2-k<0$에서 $k>2$

$\therefore 2<k<4$

24. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$은 서로 다른 두 근 $\alpha,\ \beta$를 갖는다. $f(x) = x^2 + bx + a$에 대하여 $f(\alpha) = \beta,\ f(\beta) = \alpha$가 성립할 때, $a + b$의 값은?

① 0　　② -1　　③ -2　　④ -3　　⑤ -4

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta = -a,\ \alpha\beta = b$

$f(\alpha) = \alpha^2 + b\alpha + a = \beta \cdots$ ㉠

$f(\beta) = \beta^2 + b\beta + a = \alpha \cdots$ ㉡

㉠ $-$ ㉡하면

$\alpha^2 - \beta^2 + b(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$

$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + b + 1) = 0$

$\alpha \neq \beta$이므로 $\alpha + \beta + b + 1 = 0$

$\therefore\ -a + b + 1 = 0 \cdots$ ㉢

㉠ $+$ ㉡하면

$\alpha^2 + \beta^2 + b(\alpha + \beta) + 2\alpha = \alpha + \beta$

$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + (b - 1)(\alpha + \beta) + 2a = 0$

$\therefore\ a^2 - 2b - a(b - 1) + 2a = 0 \cdots$ ㉣

㉢에서 $b = a - 1$을 ㉣에 대입하면

$a^2 - 2(a - 1) - a(a - 1 - 1) + 2a = 0,\ 2a + 2 = 0$

$\therefore\ a = -1,\ b = -2$

$\therefore\ a + b = -3$

25. x에 대한 이차방정식 $x^2+(m+3)x+(m+6)=0$의 두 근이 모두 양수일 때, 실수 m의 값의 범위에 속하는 정수를 구하면 ?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

(i) (두근의 합) $-m-3>0$
$m<-3$
(ii) (두근의 곱) $m+6>0$
$m>-6$
(iii) $D=(m+3)^2-4(m+6)\geq 0$
$m^2+2m-15\geq 0$
$(m-3)(m+5)\geq 0$
$m\leq -5$ 또는 $m\geq 3$
(i), (ii), (iii) 에서 $-6<m\leq -5$
$\therefore m=-5$