

1. 이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면

$$D = (a+2)^2 - 4 = 0 \text{ 이므로}$$

$$a^2 + 4a + 4 - 4 = a^2 + 4a = 0$$

따라서 $a = 0$ 또는 $a = -4$

따라서 상수 a 의 값의 합은 -4

2. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a+3)x + a^2 + 7 = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a \geq 0$

② $-1 < a < 0$

③ $-2 < a < 0$

④ $a \geq -\frac{1}{3}$

⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2+7) \geq 0$$

$$a^2 + 6a + 9 - a^2 - 7 \geq 0$$

$$6a + 2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$$

3. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k - a)x + k^2 + b - 3 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b 의 값은?

① $a = 1, b = 2$

② $a = 0, b = 3$

③ $a = -1, b = 2$

④ $a = 0, b = 2$

⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 판별식이 0이다.

$$D' = (k - a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$$

$$\Rightarrow -2ak + a^2 - b + 3 = 0$$

모든 k 에 대해 성립하려면

$$-2a = 0, a^2 - b + 3 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 3$$

4. 이차방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2 = b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 를 완전제곱식으로 고치면

$$(x^2 + 2x + 1) + 2 = 0, \quad (x+1)^2 = -2$$

$$\therefore a = 1, \quad b = -2$$

$$\therefore a - b = 3$$

5. 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$ 의 값은?

① -5

② -4

③ -1

④ 1

⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계를 이용하면,

$$\alpha + \beta = -3 \quad \alpha\beta = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 &= \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \\ &= -3 + 2 = -1\end{aligned}$$

6. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3

② 0

③ 2

④ 4

⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$

근과 계수와의 관계에 의해

$$a = 4, b = 1$$

$$\therefore ab = 4$$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입

$$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$$

계수가 유리수이므로

$$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$$

$$a = 4, b = 1$$

$$\therefore ab = 4$$

7. 방정식 $|x| + |x - 1| = 9$ 의 모든 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -20

해설

$$|x| + |x - 1| = 9 \text{에서}$$

i) $x < 0$ 일 때,

$$-x - x + 1 = 9$$

$$\therefore x = -4$$

ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,

$$x - x + 1 = 9 \text{(성립하지 않음)}$$

iii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x + x - 1 = 9$$

$$\therefore x = 5$$

따라서 모든 근의 곱은

$$(-4) \times 5 = -20$$

8. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.
 ㉡ $k = 1$ 이면 중근을 갖는다.
 ㉢ 두 근의 곱은 실수이다.
 ㉤ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉤

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$

㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>

㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 중근을 갖는다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉤ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1+k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1+k} = ai (a \neq 1)$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.

9. 이차방정식 $(1-i)x^2 + (-3+i)x + 2 = 0$ 의 해는 $x = a$ 또는 $x = p + qi$ 이다. 이 때, $a + p + q$ 의 값을 구하여라. (단, a, p, q 는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1-i)x^2 + (-3+i)x + 2 = 0$ 의 양변에 $1+i$ 를 곱하면

$$(1+i)(1-i)x^2 + (1+i)(-3+i)x + 2(1+i) = 0$$

$$2x^2 - 2(2+i)x + 2(1+i) = 0$$

$$x^2 - (2+i)x + 1+i = 0$$

$$(x-1)\{x-(1+i)\} = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 1+i$$

$$\therefore a + p + q = 3$$

10. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근의 공식을 유도하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 식을 차례대로 쓰면?

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c = 0 &\leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
 &\leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + (\quad) = -\frac{c}{a} + (\text{가}) \\
 &\leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{(\text{나})}{4a^2} \\
 &\leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{(\text{다})}{2a}
 \end{aligned}$$

- ① $\frac{b^2}{4a^2}, b^2 - 4ac, \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$
 ② $\frac{b}{2a}, \sqrt{b^2 - 4ac}, b^2 - 4ac$
 ③ $\frac{b}{2a}, b^2 - 4ac, \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$
 ④ $\frac{b^2}{4a^2}, \sqrt{b^2 - 4ac}, b^2 - 4ac$
 ⑤ $\frac{b}{a}, \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac, \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}$

해설

(가) 좌변을 제곱 꼴로 만들려 하는 것이므로 $(x + \frac{b}{2a})^2 =$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$(나) -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$(다) \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

11. $|x+1| + |x-2| = x+3$ 을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

i) $x < -1$ 일 때,

$$-x-1-x+2 = x+3$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} \text{ (모순)}$$

ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,

$$x+1-x+2 = x+3$$

$$\therefore x = 0$$

iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$x+1+x-2 = x+3$$

$$\therefore x = 4$$

12. 실수 a, b 에 대하여 연산 $*$ 를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x - 6) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + 2\beta$ 의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x * (x - 6) = 0 \text{ 에서}$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -3, 2$$

$$\therefore \alpha = -3, \beta = 2 \ (\alpha < \beta)$$

$$\therefore \alpha + 2\beta = 1$$

13. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이 되도록 유리수 p, q 를 정할 때, $p + q$ 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ 1

⑤ 2

해설

유리계수 이차식의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면,
그 켤레근인 $2 - \sqrt{3}$ 도 방정식의 근이므로
근과 계수와의 관계에 의해서

$$-p = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$$

$$\therefore p = -4$$

$$q = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

$$\therefore q = 1$$

$$\therefore p + q = -4 + 1 = -3$$

14. 이차방정식 $x^2 + 2x - a = 0$ 의 해가 3 또는 b 라 할 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 8

② 10

③ 12

④ 14

⑤ 16

해설

$x = 3$ 이 $x^2 + 2x + a = 0$ 의 근이므로

$$3^2 + 2 \cdot 3 - a = 0 \quad \therefore a = 15$$

$\therefore a = 15$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^2 + 2x - 15 = 0, (x + 5)(x - 3) = 0$$

따라서 $x = -5$ 또는 $x = 3$ 이므로 $b = -5$

$$\therefore a + b = 15 + (-5) = 10$$

15. $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2 - 2x + 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$$

$$(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$$

$$= \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta$$

$$= (\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta$$

$$= 9 - 6 \cdot 2 + 12 = 9$$

16. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가질 때 $x^2 - 2(a - 1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$ 의 근을 판별하면?

① 중근

② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근

④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가지려면

$$D' = 4 + a - b = 0$$

$$\therefore b = a + 4$$

$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$$

$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 2a + 16 = 0$$

$$D' = (a - 1)^2 - (a^2 - 2a + 16) = -15 < 0$$

$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

17. 이차방정식 $x^2 - 5x + p = 0$ 의 두 근은 $3, \alpha$ 이고 $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근은 α, β 이다. 이 때 β 의 값은?(단 p, q 는 상수)

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

이차방정식 $x^2 - 5x + p = 0$ 에서

근과 계수의 관계에 의해

두 근의 합 : $3 + \alpha = 5 \quad \therefore \alpha = 2$

두 근의 곱 : $3 \cdot \alpha = p = 3 \cdot 2 = 6$

이차방정식 $x^2 - 6x + q = 0$ 의 두 근이 $2, \beta$ 이므로

$2 + \beta = 6 \quad \therefore \beta = 4$

18. 이차식 $x^2 - xy - 2y^2 - ax - 3y - 1$ 이 x, y 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 1

② $\frac{3}{2}$

③ 2

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 3

해설

(주어진 식) = 0이라 놓고 x 에 관하여 정리하면

$$x^2 - (a + y)x - (2y^2 + 3y + 1) = 0$$

근의 공식에서

$$\begin{aligned} x &= \frac{a + y \pm \sqrt{(a + y)^2 + 4(2y^2 + 3y + 1)}}{2} \\ &= \frac{a + y \pm \sqrt{9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

주어진 식이 x, y 에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식(= D) 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D = 9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4$ 의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4} = (a + 6)^2 - 9(a^2 + 4) = -8a^2 + 12a = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

19. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, a, b, c, p, q 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

보기

- ㉠ 판별식은 $b^2 - 4ac$ 이다.
- ㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.
- ㉢ $a < 0, c < 0$ 이면 허근만 갖는다.
- ㉣ $a > 0, c < 0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.
- ㉥ 한 근이 $p + qi$ 이면 다른 한 근은 $q - pi$ 이다.

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

- ㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a, b, c 가 실수이므로 판별식 사용 가능(참)
- ㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)
- ㉢ $b^2 - 4ac$ 에서 $ac > 0$ 이다.
하지만 $b^2 < 4ac$ 인 경우만 허근을 가짐(거짓)
- ㉣ 판별식 $b^2 - 4ac$ 에서 $ac < 0$ 이므로 $b^2 - 4ac > 0$ (참)
- ㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)
- ㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p + qi$ 이면 $p - qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

20. α, β 를 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ (단, $ac \neq 0$)의 두 근이라 할 때,
 다음 중 $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 을 두 근으로 가지는 이차방정식은?

① $a^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + c^2 = 0$

② $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x - c^2 = 0$

③ $c^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + a^2 = 0$

④ $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

⑤ $c^2x^2 + (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

해설

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} \\ &= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

따라서, 구하는 이차방정식은

$$x^2 - \frac{(b^2 - 2ac)}{c^2}x + \frac{a^2}{c^2} = 0$$

$$\text{즉, } c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$$

21. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

(가)를 계수로 갖는 이차방정식은 (나)의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다)를 계수로 갖는 이차식 $ax^2 + bx + c$ 는 (라)의 범위에서는 반드시 (마)의 곱으로 인수분해된다.

- ① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식
- ② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식
- ③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식
- ④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식
- ⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

22. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(m-2)x + 2m-1 = 0$ 의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $m > 5$

② $m \geq 5$

③ $m < 5$

④ $m \leq 5$

⑤ $-5 \leq x \leq 5$

해설

주어진 이차방정식이 두 실근을 가져야 하므로

$$D/4 = (m-2)^2 - 2m + 1 \geq 0$$

$$\text{즉 } m^2 - 4m + 4 - 2m + 1 = m^2 - 6m + 5 \geq 0$$

따라서 $(m-5)(m-1) \geq 0$ 이므로

$$m \leq 1 \text{ 또는 } m \geq 5$$

또 두근의 합 $-2(m-2) < 0$ 이어야 하므로 $m > 2$

또 두근의 곱 $2m-1 > 0$ 이어야 하므로 $m > \frac{1}{2}$

따라서 $m \geq 5$

23. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - (k^2 - 3k - 4)x + 2 - k = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, α 는 양수이고 β 는 음수이다. β 의 절댓값이 α 의 절댓값보다 클 때, 정수 k 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$(\text{두 근의 합}) = k^2 - 3k - 4 = (k - 4)(k + 1) < 0$$

$$-1 < k < 4$$

$$(\text{두 근의 곱}) = 2 - k < 0 \text{에서 } k > 2$$

$$\therefore 2 < k < 4$$

24. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 은 서로 다른 두 근 α, β 를 갖는다.
 $f(x) = x^2 + bx + a$ 에 대하여 $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha$ 가 성립할 때, $a + b$ 의 값은?

① 0

② -1

③ -2

④ -3

⑤ -4

해설

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 + b\alpha + a = \beta \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(\beta) = \beta^2 + b\beta + a = \alpha \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 하면

$$\alpha^2 - \beta^2 + b(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$$

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + b + 1) = 0$$

$$\alpha \neq \beta \text{이므로 } \alpha + \beta + b + 1 = 0$$

$$\therefore -a + b + 1 = 0 \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 하면

$$\alpha^2 + \beta^2 + b(\alpha + \beta) + 2a = \alpha + \beta$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + (b - 1)(\alpha + \beta) + 2a = 0$$

$$\therefore a^2 - 2b - a(b - 1) + 2a = 0 \cdots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉢}$ 에서 $b = a - 1$ 을 $\textcircled{㉣}$ 에 대입하면

$$a^2 - 2(a - 1) - a(a - 1 - 1) + 2a = 0, 2a + 2 = 0$$

$$\therefore a = -1, b = -2$$

$$\therefore a + b = -3$$

25. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (m+3)x + (m+6) = 0$ 의 두 근이 모두 양수일 때, 실수 m 의 값의 범위에 속하는 정수를 구하면?

① -6

② -5

③ -4

④ -3

⑤ -2

해설

(i) (두근의 합) $-m - 3 > 0$

$m < -3$

(ii) (두근의 곱) $m + 6 > 0$

$m > -6$

(iii) $D = (m+3)^2 - 4(m+6) \geq 0$

$m^2 + 2m - 15 \geq 0$

$(m-3)(m+5) \geq 0$

$m \leq -5$ 또는 $m \geq 3$

(i), (ii), (iii)에서 $-6 < m \leq -5$

$\therefore m = -5$