1. 두 조건 $p : 0 < x < 3$, $q : -1 < x < 2$ 에 대하여 '$\sim p$ 또는 q' 의 부정은?

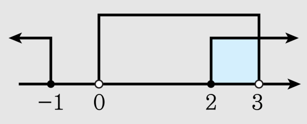
① $0 < x < 2$　　② $-1 < x < 3$

③ $x \leq -1$ 또는 $x > 0$　　④ $-1 \leq x < 3$

⑤ $2 \leq x < 3$

해설

'$\sim p$ 또는 q' 의 부정은 'p 이고 $\sim q$' 이므로
$p : 0 < x < 3$, $\sim q : x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$ 에서



따라서, '$\sim p$ 또는 q' 의 부정은 $2 \leq x < 3$ 이다.

2. 다음 명제 중에서 참인 것의 개수는?

㉠ 정수 n 에 대하여, n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.

㉡ $xy \neq 6$ 이면 $x \neq 2$ 이거나 $y \neq 3$ 이다.

㉢ x, y 가 실수일 때, $x+y>0$ 이면 $x>-1$ 또는 $y>1$ 이다.

㉣ $x+y$ 가 유리수이면 x, y 중 적어도 하나는 유리수이다.

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

㉠, ㉡, ㉢의 경우 그 대우를 적어 보면
㉠의 대우 : 정수 n 에 대하여, n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.
㉡의 대우 : $x=2$ 이고 $y=3$ 이면 $xy=6$ 이다.
㉢의 대우 : x, y 가 실수일 때, $x \leq -1$ 이고 $y \leq 1$ 이면 $x+y \leq 0$ 이다. 이것은 모두 참임을 알 수 있다.
㉣의 반례 ; $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$ 이면 $x+y$ 가 유리수지만 x, y 는 모두 무리수이다.

3. 다음 중 참인 명제는 모두 몇 개인가?

㉠ 임의의 유리수 x에 대하여 $x+y=\sqrt{3}$ 을 만족하는 유리수 y 가 존재한다.
㉡ 임의의 유리수 x에 대하여 $xy=1$ 을 만족하는 유리수 y 가 존재한다.
㉢ 임의의 무리수 x에 대하여 $xy=1$ 을 만족하는 무리수 y 가 존재한다.
㉣ 임의의 무리수 x에 대하여 $\sqrt{3}x$ 는 무 리수이다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 없다.

해설

㉠ 주어진 조건을 만족하는 유리수 y가 존재한다면 (유리수)+(유리수)=(무리수)가 되므로 모순이다. (거짓)
㉡ $x=0$ 일 때, $xy=1$을 만족하는 y는 존재하지 않는다. (거짓)
㉢ x가 무리수이므로 $x \neq 0$이다. 즉, $xy=1$ 에서 $y=\frac{1}{x}$ 은 무리수이므로 무리수 y가 존재한다. (참)
㉣ $x=\sqrt{3}$ 일 때, $\sqrt{3}x=\sqrt{3}\sqrt{3}=3$ 이 되어 유리수이다. (거짓)
따라서 참인 명제는 ㉢ 하나뿐이다.

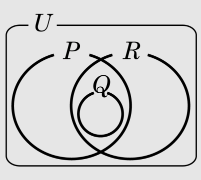
4. 전체집합 U 에서 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 할 때, $Q \subset (P \cap R)$ 가 성립한다. 이때, 다음 중 항상 참인 명제를 모두 고르면?

① $p \to r$ ② $\sim p \to \sim q$ ③ $r \to q$

④ $q \to r$ ⑤ $\sim r \to p$

해설

세 집합 P, Q, R 에 대하여 $Q \subset (P \cap R)$ 를 만족하도록 벤 다이어그램을 그리면 다음 그림과 같다.



이때, $P^c \subset Q^c, Q \subset R$ 이므로 $\sim p \Rightarrow \sim q$, $q \Rightarrow r$

5. 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하고, 명제 'p 이면 q 이다.' 가 거짓임을 보이기 위해 반례를 찾으려고 한다. 다음 중 그 반례가 속하는 집합은?

① $P-Q$　　② $Q-P$　　③ $P\cap Q$
④ $P^c\cap Q^c$　　⑤ $Q\cup P^c$

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓이면 $P \not\subset Q$ 이고, 반례는 조건 p 는 만족하지만 조건 q 는 만족하지 않는 것이므로 $x \in P$ 이고 $x \notin Q$ 인 x 가 속하는 집합을 찾으면 된다. 즉, 반례는 집합 $P-Q$ 의 원소 중에서 찾으면 된다.

6. 두 조건 $p: |x-k| \le 1$, $q: -7 \le x \le 3$ 에서 명제 $p \to q$ 가 참일 때, k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -12 ② -4 ③ 8 ④ 4 ⑤ 12

해설

$P \subset Q$

$p: |x-k| \le 1 \to k-1 \le x \le k+1$

$-7 \le k-1 \to -6 \le k$

$k+1 \le 3 \to k \le 2$

$\therefore\ -6 \le k \le 2$

$(-6)+2=-4$

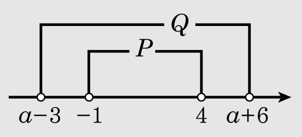
7. 실수 전체의 집합에서의 두 조건 $p : -1 < x < 4$, $q : a-3 < x < a+6$ 일 때, 명제 $p \to q$ 가 참이기 위한 실수 a 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하면 $P = \{x \mid -1 < x < 4\}$

$Q = \{x \mid a-3 < x < a+6\}$



이때, 명제 $p \to q$ 가 참이려면 $P \subset Q$ 이어야 하므로 위 수직선에서 $a-3 \le -1$ 이고 $a+6 \ge 4$ 이다.

$\therefore -2 \le a \le 2$

따라서, a 의 최댓값은 2, 최솟값은 -2 이므로 최댓값과 최솟값의 합은 0 이다.

8. 두 조건 $p: 2 \le x < 5$, $q: a+1 < x < a+9$ 에 대하여 명제 $p \to q$ 가 참이 되도록 하는 정수 a 의 모든 값의 합은?

① -10 ② -9 ③ -6 ④ -5 ⑤ -3

해설

조건 p 를 만족하는 진리집합을 P, 조건 q 를 만족하는 진리집합을 Q 라 하면 $p \to q$ 이려면 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다.

$a+1 < 2$ 이고 $a+9 \ge 5$ 이므로 $a < 1$, $a \ge -4$

따라서 $-4 \le a < 1$ 이므로 만족하는 정수 a 는 $-4, -3, -2, -1, 0$ 이고 합은 -10 이다.

9. 명제「$p \to \sim q$」의 역이 참일 때, 반드시 참인 명제는?

① $p \to q$　② $\sim p \to q$　③ $\sim p \to \sim q$
④ $\sim q \to p$　⑤ $\sim q \to \sim p$

해설

주어진 명제의 역「$\sim q \to p$」가 참이므로, 반드시 참인 명제는 역의 대우인「$\sim p \to q$」도 참이다.

10. 명제 '$2x^2+ax-9 \neq 0$ 이면 $x-3 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

대우인 '$x-3=0$ 이면 $2x^2+ax-9=0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$2\cdot 3^2+3a-9=0,\ 3a+9=0$

$\therefore\ a=-3$

11. 다음 두 진술이 모두 참이라 할 때 다음 중 옳은 것은?

㉠ 수학을 잘하는 학생은 머리가 좋다. ㉡ 수학을 잘하는 학생은 물리 또는 컴퓨터를 잘한다.

① 수학을 잘하는 학생은 물리를 잘한다.

② 컴퓨터를 잘하는 학생은 머리가 좋다.

③ 머리가 좋은 학생은 물리를 잘 한다.

④ 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

⑤ 물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

해설

p : 수학을 잘하는 학생, q : 머리가 좋다, r : 물리 또는 컴퓨터를 잘 한다.$p \Rightarrow q$, $p \Rightarrow r$에서 대우명제도 참이므로$\sim q \Rightarrow \sim p$ 에서 '머리가 좋지 않은 학생은 수학을 잘 못한다.'$\sim r \Rightarrow \sim p$ 에서 '물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.'

12. 자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수임을 증명하는 과정이다.
(1), (2), (3)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

> [증명]
> 주어진 명제의 (1)을(를) 구하여 보면
> (1) : 'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'
> 이 때, n이 홀수이므로 n을 다음과 같이 나타낼 수 있다.
> $n=$ (2)(k는 0 또는 자연수)
> 이 때, n^2의 값을 구하면
> $n^2 = (2)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
> 여기서 $2(k^2 + 2k)$는 (3)이므로 n^2은 홀수이다.
> 따라서 (1)가(이) 참이므로 주어진 명제도는 참이다.

① 역, $2k+1$, 0 또는 짝수
② 이, $2k-1$, 홀수
③ 대우, $2k+1$, 0 또는 짝수
④ 대우, $2k-1$, 0 또는 홀수
⑤ 역, $2k+1$, 0 또는 홀수

해설

[증명]
주어진 명제의 대우를 구하여 보면
대우 : 'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'
이 때, n이 홀수이므로 n을 다음과 같이 나타낼 수 있다.
$n = 2k+1$(k는 0 또는 자연수)
이 때, n^2의 값을 구하면
$n^2 = 2+1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
여기서 $2(k^2 + 2k)$는 0 또는 짝수이므로 n^2은 홀수이다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도는 참이다.

13. 다음 (　　　)에 「필요, 충분, 필요충분」 중에서 알맞은 것을 차례대로 써 넣어라.

$x = 2$ 는 $x^2 = 4$ 이기 위한 (　　　)조건이다 평행사변형은 직사각형이기 위한 (　　　)조건이다.

▶ 답 : 조건

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$x = 2$ 는 $x^2 = 4$ 이기 위한 충분 조건이다. 평행사변형은 직사각형이기 위한 필요 조건이다.

14. $x,\ y$ 가 실수일 때, 다음 중에서 조건 p가 조건 q 이기 위한 필요충분인 것은 ?

① $p : x+y \geq 2,\ q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$

② $p : x+y$는 유리수이다., $q : x,\ y$는 유리수이다.

③ $p : xy > x+y > 4,\ q : x > 2$이고 $y > 2$

④ $p : xy+1 > x+y > 2,\ q : x > 1$이고 $y > 1$

⑤ $p : xyz = 0,\ q : xy = 0$

해설

① $p : x+y \geq 2 \Rightarrow q\ :\ x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (반례 : $x = 2,\ y = -1$)
② $p : x+y$ 는 유리수이다. $\Rightarrow q : x,\ y$는 유리수이다. (반례 : $x = 1 - \sqrt{2},\ y = 1 + \sqrt{2}$)
③ $p\ :\ xy > x+y > 4 \Rightarrow q\ :\ x > 2$ 이고 $y > 2$ (반례 : $x = 4,\ y = 2$)
④ $p : xy+1 > x+y > 2 \Leftrightarrow q : x > 1$ 이고 $y > 1$
⑤ $p : xyz = 0 \Rightarrow q : xy = 0$ (반례 : $x = 1,\ y = 1,\ z = 0$)

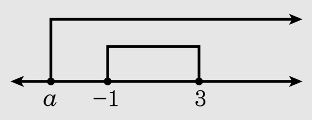
15. $x \geq a$가 $-2 \leq x-1 \leq 2$이기 위한 필요조건 일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a \geq -1$ ② $a \leq -1$ ③ $a \leq 3$

④ $a \geq 3$ ⑤ $a > 3$

해설

$-2 \leq x-1 \leq 2 \rightarrow -1 \leq x \leq 3$,
$x \geq a$ 가 $-1 \leq x \leq 3$의 범위를 포함해야 한다.



16. 두 조건 $p : x > a$, $q : -3 \le x \le 1$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하면?

① -4 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때,
p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \to p$,
즉, $Q \subset P$ 가 성립한다.
$P = \{x \mid x > a\}$, $Q = \{x \mid -3 \le x \le 1\}$ 이므로 $a < -3$
$\therefore$ 정수 a 의 최댓값은 -4 이다.

17. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 이때, 다음 식을 만족시키는 조건 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$$

▶ 답: ________ 조건

▷ 정답: 충분조건

해설

$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$
$\{P \cap (Q \cup Q^c)\} \cap Q = P$
$(P \cap U) \cap Q = P$
$P \cap Q = P$
$P \subset Q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

18. $0 < a < b,\ a+b=1$ 일 때 $1,\ \sqrt{a}+\sqrt{b},\ \sqrt{b}-\sqrt{a},\ \sqrt{b-a}$의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{b-a} < \sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b} < 1$

② $\sqrt{b-a} < \sqrt{b}-\sqrt{a} < 1 < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

③ $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a} < 1 < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

④ $\sqrt{b-a} < 1 < \sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

⑤ $1 < \sqrt{b-a} < \sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

먼저 주어진 식을 각각 제곱하면
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$
$(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$
$(\sqrt{b-a})^2 = b-a$

이 때 $1 = a+b$ 이므로 $a = \frac{1}{4},\ b = \frac{3}{4}$ 을 대입하여
크기를 예상하여 두 식의 차를 알아보면
$(a+b+2\sqrt{ab})-(a+b) = 2\sqrt{ab} > 0$
$\therefore 1 = a+b < a+b+2\sqrt{ab} \cdots$ ㉠

$(a+b)-(b-a) = 2a > 0$
$\therefore b-a < a+b = 1 \cdots$ ㉡

$(b-a)-(a+b-2\sqrt{ab})$
$= -2a+2\sqrt{ab}$
$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}\ 0 > 0$
$\therefore a+b-2\sqrt{ab} < b-a \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서
$\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a} < 1 < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

19. 부등식 $7^{20} < n^{10}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$\frac{49}{n} < 1$ 이므로 $n > 49$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50 이다.

20. 부등식 $3^{400} > 4^{100n}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$\dfrac{3^{400}}{4^{100n}} = \dfrac{(3^4)^{100}}{(4^n)^{100}} = \left(\dfrac{81}{4^n}\right)^{100} > 1$

$3^{400} > 4^{100n}$ 이므로 $\dfrac{81}{4^n} > 1$

$\therefore\ n = 1,\ 2,\ 3$

따라서 자연수 n 의 개수는 3 개이다.

21. $a+b=9$를 만족하는 양수 a, b에 대하여 $[ab]$의 최댓값을 구하여라.
(단, $[x]$는 x를 넘지않는 최대의 정수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

산술기하평균의 관계를 이용하면 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$ab \leq \left(\frac{9}{2}\right)^2$, $ab \leq 20.25$

$\therefore [ab]$ 의 최댓값은 20

22. $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}\times\frac{a}{c}}=3$

$\therefore \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \geq 3$

23. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$x^2+y^2=5$이므로

$25 \geq (x+2y)^2$

$\therefore\ -5 \leq x+2y \leq 5$

$\therefore\ M=5,\ m=-5$

$\therefore\ M-m=5-(-5)=10$

24. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \ge (x+3y)^2$
$x^2+y^2=10$이므로 $100 \ge (x+3y)^2$
$\therefore\ -10 \le x+3y \le 10$
$\therefore\ M=10,\ m=-10$
$\therefore\ M-m=10-(-10)=20$

25. 네 개의 조건 p, q, r, s에 대하여 $q \Rightarrow \sim s$, $\sim r \Rightarrow p$ 라 한다. 이로부터 $s \Rightarrow r$라는 결론을 얻기 위해 다음 중 필요한 것은?

① $p \Rightarrow q$　② $p \Rightarrow \sim r$　③ $r \Rightarrow q$
④ $r \Rightarrow s$　⑤ $\sim s \Rightarrow q$

해설

$q \to \sim s, \sim r \to p$
$s \to \sim q, \sim p \to r$
$\therefore \sim q \to \sim p \Rightarrow p \to q$

26. 주머니 속의 빨강, 파랑, 노랑의 서로 다른 색의 구슬 세 개를 차례로 꺼낼 때, 다음 중 단 하나만 참이라고 한다. 다음에서 옳은 것을 고르면?

㉠ 첫번째 구슬은 빨간색이 아니다.
㉡ 두번째 구슬은 파란색이 아니다.
㉢ 세번째 구슬은 파란색이다.

① 첫번째 구슬이 빨간색이다.
② 첫번째 구슬이 파란색이다.
③ 두 번째 구슬이 파란색이다.
④ 세 번째 구슬이 노란색이다.
⑤ 두 번째 구슬이 노란색이다.

해설

㉢이 참이면 ㉡도 참이 되어 모순.
㉠이 거짓이고 ㉡가 참이면 ㉢이 참이 되어 모순 ∴ ㉠이 참이고, ㉡, ㉢이 거짓이다.
∴ 첫번째 구슬이 노란색, 두 번째 구슬이 파란색, 세 번째 구슬이 빨간색이다.

27. 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, r은 q이기 위한 필요조건, s는 $\sim r$이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $r \to q$　　② $q \to \sim p$　　③ $s \to \sim q$

④ $\sim s \to \sim p$　　⑤ $\sim r \to p$

해설

$p \to q \quad s \to \sim r \quad q \to r$

$q \to r$의 대우 : $\sim r \to \sim q$

$\therefore s \to \sim r, \sim r \to \sim q$ 이므로 $s \to \sim q$

28. $a > 1$일 때 $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$이라 한다. a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a > b > c$ ② $a > c > b$ ③ $b > c > a$
④ $b > a > c$ ⑤ $c > b > a$

해설

$b - a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) - a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - a\right)$

그런데, $a > 1$이므로 $\frac{1}{a} - a < 0 \quad \therefore\ b < a$

또, $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) > \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1 \ \left(\because\ a \neq \frac{1}{a}\right)$

$c - b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) - b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - b\right) < 0$

$\therefore\ c < b$

$\therefore\ a > b > c$

29. 다음 중 항상 성립하는 부등식이 아닌 것은?(a, b, c 는 모두 양수)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

③ $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

④ $a^2 - 1 > a$

⑤ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$

① $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a = b$)

② $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2$

$= a + b + 2\sqrt{ab} - (a+b) = 2\sqrt{ab} \geq 0$

$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$(단 $a = b$ 일때 등호성립)

③ $a^3 + b^3 - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$= (a+b)(a-b)^2 \geq 0$

$\therefore a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ (등호 성립조건은 $a = b$)

④ (반례) $a = 1$

$1^2 - 1 > 1, 0 > 1$

$\therefore$ 거짓

⑤ a, b, c 가 모두 양수이므로

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a = b$)

$b + c \geq 2\sqrt{bc}$ (등호 성립조건은 $b = c$)

$c + a \geq 2\sqrt{ca}$ (등호 성립조건은 $c = a$)

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$

(등호 성립조건은 $a = b = c$)

30. 좌표평면 위의 점 A(1, 2)를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0,\ b>0)$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, △OBC의 최소 넓이는?

① 3　② 3.5　③ 4　④ 4.5　⑤ 5

해설

B(a, 0), C(0, b)이므로
△OBC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}ab\cdots\cdots$ ㉠

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$은 점 (1, 2)를 지나므로

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}=2\sqrt{\frac{1}{S}}$

$\therefore\ S\geq 4$