

1. 포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 a , b 만큼 평행이동 하였더니 직선 $y = 2x + 1$ 에 접하였다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2}$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

해설

포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 a , b 만큼 평행 이동하면 포물선 $y = (x - a)^2 - 4(x - a) + 7 + b$ 가 된다.
이 포물선 $y = (x - a)^2 - 4(x - a) + 7 + b$ 와 직선 $y = 2x + 1$ 이 접하므로
두 식을 연립하면 $(x - a)^2 - 4(x - a) + 7 + b = 2x + 1$ 이다.
 $x^2 - 2(a + 3)x + a^2 + 4a + b + 6 = 0$ 이
중근을 가지므로
 $\frac{D}{4} = (a + 3)^2 - (a^2 + 4a + b + 6) = 2a - b + 3 = 0$
 $\therefore b = 2a + 3$
따라서, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (2a + 3)^2}$
$$= \sqrt{5\left(a + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}}$$
 이므로
 $a = -\frac{6}{5}$ 일 때,
최솟값 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 를 가진다.

2. 원 $x^2 + (y - 3)^2 = 1$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 시켜 얻어진 도형을 다시 y 축 방향으로 p 만큼 평행이동 시켰더니 x 축에 접하였다. 이 때, p 의 값은?

① 0 ② ± 1 ③ ± 2 ④ ± 3 ⑤ ± 4

해설

원 $x^2 + (y - 3)^2 = 1$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 시키면 $y^2 + (x - 3)^2 = 1$ 이 된다.
이 도형을 다시 y 축 방향으로 p 만큼 평행이동 시킨다고 했으므로 구하는 도형의 방정식은 $(y - p)^2 + (x - 3)^2 = 1$ 이다.
이 도형이 x 축에 접한다고 했으므로 p 는 ± 1

3. 점 A(3, 2) 를 직선 $x - y + 2 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A'(m, n) 이라 할 때, $m + n$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = x + 2$$

$$\therefore m = y - 2 \quad n = x + 2$$

$$(x, y) = (3, 2) \text{ 이므로 } (m, n) = (0, 5)$$

$$\therefore m + n = 5$$

4. 각 자리의 숫자의 합이 5 보다 작은 두 자리 자연수의 집합을 A 라 할 때, $n(A)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A = \{10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31, 40\}$

$n(A) = 10$

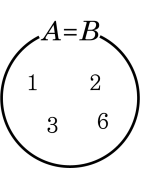
5. 다음 중 $A \subset B$ 의 포함 관계가 아닌 것은?

- ① $A = \{x \mid x \text{는 } 10\text{보다 작은 홀수}\}$, $B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$
- ② $A = \{x \mid x \text{는 두 자리의 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 100\text{보다 작은 자연수}\}$
- ③ $A = \{x \mid x = 2 \times n, n = 1, 2\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}$
- ④ $A = \{x \mid x \text{는 } 1\text{보다 작은 자연수}\}$, $B = \{0\}$
- ⑤ $A = \{x \mid x \text{는 } 10\text{보다 큰 홀수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 99\text{보다 작은 두 자리의 홀수}\}$

해설

- ⑤ $B \subset A$ 관계이다.

6. 다음 그림의 두 집합 A 와 B 의 관계가 옳은 것을 골라라.



- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| ☐ ㉠ $A \in B$ | ☐ ㉡ $A \subset B$ |
| ☐ ㉢ $B \subset A$ | ☐ ㉣ $A \neq B$ |

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉡

▶ 정답 : ㉢

해설

두 집합 A, B 는 $A = B$ 이므로 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이다. ㉠에서 기호 $\in$ 는 원소의 포함관계이므로 옳지 않고, $A = B$ 이므로 ㉣도 옳지 않다.

7. 집합 $A = \{a, b, c, d\}$ 의 부분집합 중에서 a 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 8 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$\{b, c, d\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

즉, $2^3 = 8$

8. $\{1\} \subset A \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 를 만족하는 집합 A 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 A 는 $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합이면서 1을 포함하는 집합이
므로 $\{2, 3, 4\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.
 $2^3 = 8$ (개)

9. 집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 에서 1 을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 8 개라고 할 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

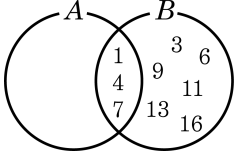
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$2^{(1\text{을 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-1} = 8 = 2^3 \quad \therefore n = 4$$

10. 다음 벤 다이어그램에서 $B = \{1, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 16\}$, $A \cap B = \{1, 4, 7\}$ 일 때, 다음 중 집합 A 가 될 수 없는 것은?(정답 2 개)



- ① $\{1, 2, 4, 7\}$
- ② $\{1, 2, 4, 5, 7\}$
- ③ $\{1, 3, 4, 7, 9\}$
- ④ $\{1, 4, 5, 7, 8\}$
- ⑤ $\{1, 3, 7, 9, 11\}$

해설

집합 A 는 반드시 $A \cap B = \{1, 4, 7\}$ 을 포함하여야 한다.
그러나 B 집합에만 존재하는 원소 3, 6, 9, 11, 13, 16 은 들어갈 수 없다.
③ 3, 9 가 포함되어서 옳지 않다.
⑤ 3, 9, 11 이 포함되어서 옳지 않다.

11. 전체집합 U 의 부분집합을 A 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것을 모두 고르면?(정답 2 개)

① $(A^c)^c = U - A$

② $A \cap A^c = A$

③ $A^c \cap B = B - A$

④ $A \cup A^c = A$

⑤ $\emptyset^c = U$

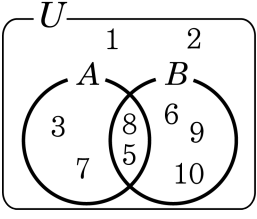
해설

① $(A^c)^c = A$

② $A \cap A^c = \emptyset$

④ $A \cup A^c = U$

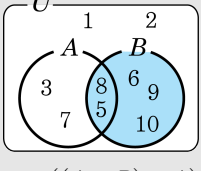
12. 다음 벤 다이어그램에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?



- ① $n(U) = 9$
- ② $n(A \cap B^c) = 2$
- ③ $n((A \cup B) - A) = 2$
- ④ $n(B - A) = 3$
- ⑤ $n(A^c) = 5$

해설

③ $(A \cup B) - A$ 를 색칠하면 다음과 같다.



$\therefore n((A \cup B) - A) = 3$

13. 다음 명제 중 참인 것은?

- ① p 가 소수이면 $\sqrt{p}$ 는 무리수이다.
- ② $x < y$ 이면 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ 이다. (단, $x \neq 0, y \neq 0$)
- ③ $\triangle ABC$ 가 직각삼각형이면 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이다.
- ④ $a + b$ 가 짝수이면 a, b 는 짝수이다.
- ⑤ 12와 18의 공약수는 9의 약수이다.

해설

- ① 소수 $p = k^2$ 이 될 수 없으므로 $\sqrt{p}$ 는 무리수
- ② 반례 : $x = -1, y = 1$, 즉 두 수의 부호가 다르면 성립하지 않는다.
- ③ 직각삼각형의 빗변이 $\overline{AC}$ 이 아닌 다른 변이 될 수도 있다.
- ④ 반례 : $a = 1, b = 3$
- ⑤ 12와 18의 공약수는 6의 약수이다.

14. 조건 p 를 만족하는 집합을 P 라 하고, 조건 q 를 만족하는 집합을 Q 라 하자. 명제 ‘ p 이면 q 이다.’ 가 거짓일 때, 반례의 집합은?

① P ② Q ③ $P - Q$ ④ P^c ⑤ Q^c

해설

만약 ‘ p 이면 q 이다.’ 가 참이라면 P 의 모든 원소는 Q 의 원소이어야 한다. 하지만 ‘ p 이면 q 이다’ 가 거짓이므로 P 의 원소이지만 Q 의 원소가 아닌 것이 반례로 적당하다.

15. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P - Q = \emptyset$ 이면 다음 중 항상 옳은 것은?

- ① p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
- ② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ③ p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
- ④ p 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.
- ⑤ p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$P - Q = \emptyset$ 이면 $P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

16. 조건 p 는 조건 q 이기 위한 충분조건이고, 조건 p 는 조건 r 이기 위한 필요조건이다. 이 때, [보기]의 명제 중 반드시 참인 명제를 모두 고르면?

보기

㉠ $p \rightarrow r$

㉡ $\sim q \rightarrow \sim r$

㉢ $r \rightarrow q$

㉣ $\sim r \rightarrow q$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

$p \rightarrow q(T) \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T) \cdots \text{㉠}$

$r \rightarrow p(T) \leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim r(T) \cdots \text{㉡}$

㉠, ㉡에서 $\sim q \rightarrow \sim r(T) \leftrightarrow r \rightarrow q(T)$

17. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a-b)\left(\frac{1}{a} - \frac{4}{b}\right)$ 의 최댓값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & (a-b)\left(\frac{1}{a} - \frac{4}{b}\right) \\ &= 5 - \left(\frac{b}{a} + \frac{4a}{b}\right) \leq 5 - 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{4a}{b}} = 1 \end{aligned}$$

18. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 이고 임의의 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$ 이 성립할 때, $g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$ 의 양변에

$x = -1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) &= g(0) = f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

19. 함수 $f(x) = a|x| + (1-a)x$ 가 실수의 범위에서 일대일대응이 되도록 하는 상수 a 의 범위는 무엇인가?

① $a < -2$

② $a > 2$

③ $a < \frac{1}{2}$

④ $a > -\frac{1}{2}$

⑤ $a < 2$

해설

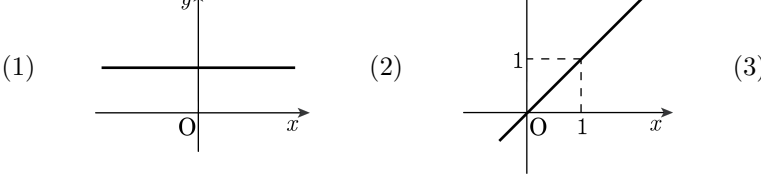
$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ (1-2a)x & (x < 0) \end{cases} \text{ 이고}$$

$x \geq 0$ 일 때 $f(x)$ 는 증가함수이므로

$x < 0$ 일 때도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 일대일대응이 된다. 따라서 $1-2a > 0$

$$\therefore a < \frac{1}{2}$$

20. 다음 함수의 그래프에서 일대일 대응, 상수함수, 항등함수인 것을 골라 적은 것 중 잘못된 것은?



- ① (1) 상수함수

② (2) 항등함수
- ③ (3) 일대일 대응

④ (1) 항등함수
- ⑤ (2) 일대일 대응

해설

일대일 대응의 그래프는 함수의 그래프 중 x 축에 평행한 직선을 그을 때, 교점이 오직 하나인 그래프이므로 (2), (3) 이다.
상수함수는 X 의 모든 원소가 Y 의 한 원소에만 대응되는 함수이므로 (1) 이다.
항등함수는 X 의 모든 원소가 자기 자신에 대응되는 함수이므로 (2) 이다.

21. $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 라고 할 때, X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수와 X 에서 Y 로 대응되는 일대일 함수의 개수를 더한 값은?

① 87 ② 88 ③ 105 ④ 144 ⑤ 267

해설

함수 a, b, c 모두 선택 가능한 개수는 4 가지 이다.
그리고 각각을 선택하는 사건은 동시에 일어나는 것이다.
 $\therefore 4 \times 4 \times 4 = 64$ 가지
일대일 함수 : $a \neq b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$ 이므로
 a 가 선택 가능한 개수 : 4
 b 가 선택 가능한 개수 : 3
 c 가 선택 가능한 개수 : 2
이 경우 역시 각각의 사건 모두 동시에 일어난다.
 $\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$ 가지
 $\therefore 64 + 24 = 88$

22. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$
즉 $2kx + k^2 - k = 0$
모든 x 에 대하여 성립하므로 $k = 0$

23. 다음 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

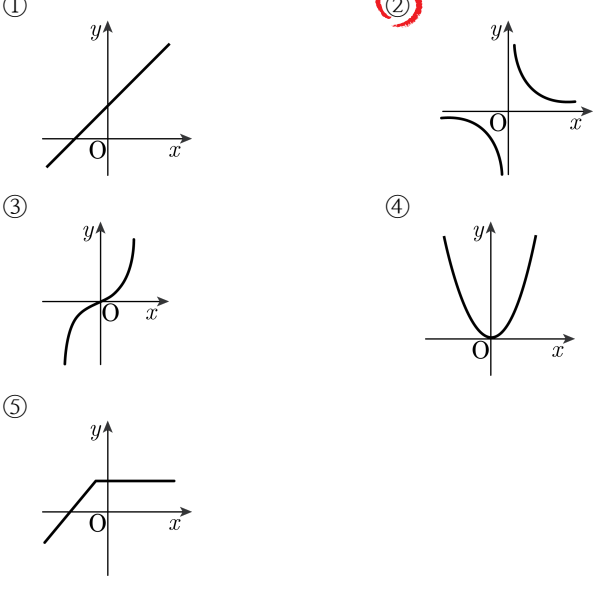
- ㉠ 임의의 자연수 x 에 대하여 $f(x) = (x \text{의 약수})$ 는 함수가 아니다.
- ㉡ 함수 f 가 일대일 함수이면 역함수가 항상 존재한다.
- ㉢ 함수의 모든 그래프는 집합으로 표현가능하다.
- ㉤ 함수 f, g 에 대하여 $f = g^{-1}$ 이면, f, g 는 $y = -x$ 에 대칭이다.
- ㉥ 임의 실수 x 에 대하여 $f(x) = [x]$ 는 일대일 함수이다. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

- ① ㉠, ㉡, ㉢
- ② ㉠, ㉢, ㉤
- ③ ㉢, ㉤
- ④ ㉠, ㉢
- ⑤ ㉡, ㉢, ㉤

해설

- ㉠ 함수는 변수 x 에 해당되는 y 값이 하나씩 대응되어야 한다.
 $\Rightarrow f(x) = (x \text{의 약수})$ 는 함수가 아니다 (참)
- ㉡ 반례 : $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$ 이면 일대일 함수라도 역함수가 존재하지 않는 경우가 있다.
- ㉢ 함수는 집합으로 표현 가능하다.
- ㉤ $f = g^{-1}$ 이면 f, g 는 $y = x$ 에 대칭이다.
- ㉥ 일대일 함수는 $a \neq b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$ 이다.
 $\therefore f(x) = [x]$ 는 일대일 함수가 아니다.

24. 다음 중 임의의 실수 x 에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형으로 적당한 것은?

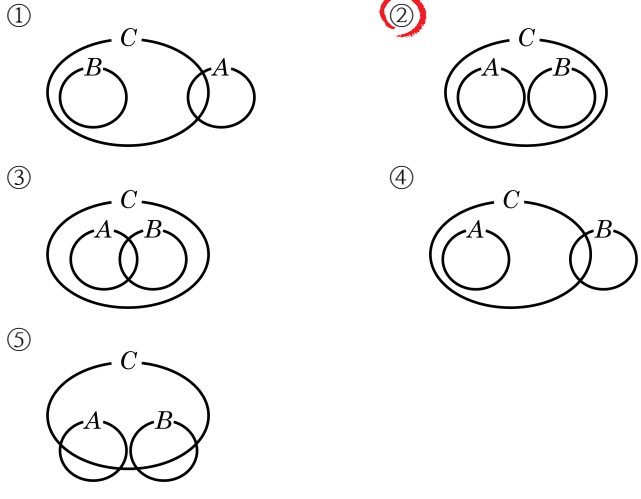


해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$ 이므로
 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이다.
 그런데 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족하려면
 함수 $f(x)$ 는 일대일 대응이고
 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이어야 한다.

25. 다음 세 명제 p, q, r 가 모두 참일 때, 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면?

$p : x \in A$ 이면 $x \in C$ 이다.
 $q : x \in B$ 이면 $x \notin A$ 이다.
 $r : x \notin C$ 이면 $x \notin B$ 이다.



해설

$p : x \in A$ 이면 $x \in C$ 이다. 따라서 $A \subset C$
 $q : x \in B$ 이면 $x \notin A$ 이다. 따라서 $A \cap B = \emptyset$
 $r : x \notin C$ 이면 $x \notin B$ 이다. 즉 $x \in B$ 이면 $x \in C$ 이다. 따라서 $B \subset C$