

1. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) $x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$
ii) $x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$
 $\therefore y = (f \circ f)(x) = 2$

2. 함수 $f(x) = kx$ 에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족시키는 상수 k 의 값을 모두 합하면 얼마인가?

㉠ 0 ㉡ 1 ㉢ 2 ㉣ 4 ㉤ 5

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(kx) = k^2x = x \text{ 이므로}$$

$$k^2 = 1$$

$$\therefore k = \pm 1$$

따라서 k 의 값의 합은 0

3. 두 함수 $f(x) = -x + 4$, $g(x) = 3x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(k) = 2$ 를 만족하는 상수 k 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(3x + 2) \\ &= -(3x + 2) + 4 = -3x + 2 \text{ 이므로} \\ (f \circ g)(k) &= 2 \text{에서 } -3k + 2 = 2 \\ \therefore k &= 0\end{aligned}$$

4. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f(f(f(x))) = x$ 가 되는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여

$$f(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$$

$$f(f(f(x))) = f(4x - 9) = 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21$$

$$f(f(f(x))) = x \text{ 이므로 } 8x - 21 = x$$

$$\therefore x = 3$$

5. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$ 을 만족하는 상수 a , b 의 합 $4a + b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$ 에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

6. 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x - 5$ 일 때, $(f \circ f)(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -11

해설

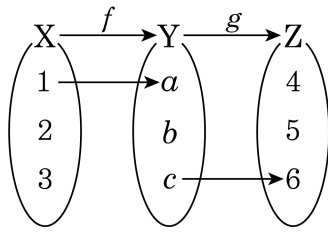
$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= (x^3 + x^2 + x - 5)^3 \\ &\quad + (x^3 + x^2 + x - 5)^2 + (x^3 + x^2 + x - 5) - 5\end{aligned}$$

$(f \circ f)(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 나머지 정리에 의하여 위의 식에 $x=1$ 을 대입한 것과 같다.

$f(1) = -2$ 이므로

$$\therefore f(f(1)) = (-2)^3 + (-2)^2 + (-2) - 5 = -11$$

7. 세 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $Z = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 일대일 대응인 함수 $f : X \rightarrow Y$ 와 $g : Y \rightarrow Z$ 가 $f(1) = a$, $g(c) = 6$, $(g \circ f)(2) = 4$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값은?



- ① a
- ② b
- ③ c
- ④ b, c 모두 가능하다.
- ⑤ a, b, c 모두 가능하다.

해설

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = 4 \dots \textcircled{7}$$

함수 f 와 g 는 일대일 대응이므로 $g(f(2)) = 4$ 에서 $f(2) = a$ 또는 b

모든 b
i) $f(2) = a$ 인 경우

$f(1) = a$ 로 정의된 조건과 모순

ii) $f(2) = b$ 인 경우

 $f(1) = a, f(2) = b$ 로 성립
$$\therefore f(2) = b, f(3) = c$$

8. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{에서 } x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$$

$$\text{즉 } 2kx + k^2 - k = 0$$

모든 x 에 대하여 성립하므로 $k = 0$

9. $f(x^2 - 3x) = 4x^2 - 12x + 9$ 일 때, $f(-2)$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2 - 3x = -2$ 에서 $x = 1, 2$

i) $x = 1$ 일 때, $f(-2) = 4 - 12 + 9 = 1$

ii) $x = 2$ 일 때, $f(-2) = 16 - 24 + 9 = 1$

i), ii) 에서 $f(-2) = 1$

10. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x-1) = x+2$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$2x-1=3$ 으로 놓으면 $x=2$
 $\therefore f(3)=4$

11. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$

④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1, g(x) = 3x - 2 \text{ 일 때,} \\ (g \circ h)(x) &= f(x) \text{ 를 만족해야 하므로} \\ (g \circ h)(x) &= g(h(x)) = 3h(x) - 2 \\ 3h(x) - 2 &= x + 1, 3h(x) = x + 3 \\ \therefore h(x) &= \frac{1}{3}x + 1 \end{aligned}$$

12. 두 함수 $f(x) = 2x - 1, g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ 를 구하면?

① $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

② $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

③ $2x - \frac{1}{2}$

④ $2x + 1$

⑤ $2x + 2$

해설

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 1) = 2x - 1 + 2 = 2x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = y \text{ 라 하면 } y = 2x + 1 \text{ 에서 } x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

13. 다음 보기의 함수 $y = f(x)$ 중 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족하는 것을 모두 고르면?

보기

- I. $f(x) = x$
- II. $f(x) = -x + 5$
- III. $f(x) = -\frac{3}{x-2} + 2$
- IV. $f(x) = \frac{x+4}{2x-1}$

- ① I, II, III ② I, II, IV ③ I, III, IV
- ④ II, III, IV ⑤ I, II, III, IV

해설

$f(x)$ 를 $y = x$ 에 대칭해도 $f(x)$ 가 되면
 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이다.

I. $f(x) = f^{-1}(x)$

II. $y = -x + 5 \Rightarrow x = -y + 5 \Rightarrow y = -x + 5$

III. $y = \frac{-3}{x-2} + 2 \Rightarrow x = \frac{-3}{y-2} + 2$
 $\Rightarrow y = \frac{-3}{x-2} + 2$

IV. $y = \frac{x+4}{2x-1} \Rightarrow x = \frac{y+4}{2y-1} \Rightarrow y = \frac{x+4}{2x-1}$

$\therefore$ I, II, III, IV : $f(x) = f^{-1}(x)$

14. $f(x) = x^2 + 1 (x \geq 0)$, $g(x) = x^2 - 6x + 10 (x \geq 3)$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g)^{-1}(3)$ 의 값을 구하면?

① 10 ② 6 ③ 4 ④ 3 ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g)^{-1} &= g^{-1} \circ f \\ \therefore (g^{-1} \circ f)(3) &= g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(10) \\ g^{-1}(10) &= k \text{ 라 하면, } g(k) = 10 \text{ 이다.} \\ \therefore k^2 - 6k + 10 &= 10 \\ \therefore k &= 6 \quad (\because k \geq 3)\end{aligned}$$

15. 두 함수 $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$, $g(x) = 2x-2$ 에 대하여 $(g^{-1} \circ f)(4)$ 의 값은?
(단, g^{-1} 는 g 의 역함수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$$(g^{-1} \circ f)(4) = g^{-1}(f(4)) = g^{-1}(4)$$

$$g^{-1}(4) = a \text{ 라 하면 } g(a) = 4$$

$$\therefore 2a - 2 = 4 \text{ 에서 } a = 3$$

$$\therefore (g^{-1} \circ f)(4) = 3$$

16. 함수 f, g 가 모든 실수 x 에 대하여 식 $(f \circ g)(x) = x$ 를 만족한다.
 $f(x) = 3x + 1$ 일 때, $g(3)$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$$(f \circ g)(x) = x \text{ 이므로 } g = f^{-1}$$

$$g(3) = f^{-1}(3) = a \text{ 라 하면}$$

$$f(a) = 3 \text{ 이므로 } 3a + 1 = 3$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

17. $f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 0) \\ x^2 & (x > 0) \end{cases}$, $g(x) = f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x) = g^{-1}(x)$ 라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

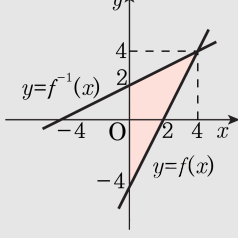
$$\begin{aligned} h(0) &= g^{-1}(0) = k \\ g(k) &= f(k+4) = 0 \\ \therefore k+4 &= 0 \\ \therefore k &= -4 \\ \therefore h(0) &= -4 \end{aligned}$$

18. 함수 $f(x) = 2x - 4$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, 함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

- ① 6
- ② 8
- ③ 10
- ④ 12
- ⑤ 14

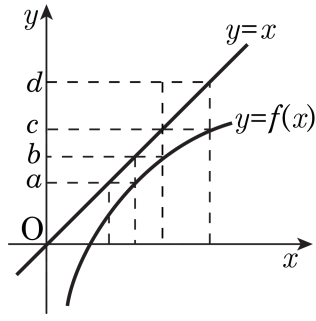
해설

$y = f(x)$ 의 그래프는
두 점 $(0, -4)$, $(2, 0)$ 을 지나는 직선이다.
그런데 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
두 점 $(-4, 0)$, $(0, 2)$ 를 지나는 직선이다.
함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의
그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로 교점의 x 좌표를 구하기
위해 $f(x) = x$ 를 풀면 $2x - 4 = x$
 $\therefore x = 4$



따라서 교점의 좌표는 $(4, 4)$ 이므로
그림에서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$

19. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$
 $f(c) = b$ 이므로 $k = c$
따라서 $f^{-1}(b) = c$

20. 점 $(2, 1)$ 을 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-2)$ 의 값은?

① -5 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = m(x - 2) + 1 = mx - 2m + 1$ ($m \neq 0$) 으로 놓으면

$f(f(x)) = m(mx - 2m + 1) - 2m + 1 = x$

$\therefore m^2x - 2m^2 - m + 1 = x$

즉, $m^2 = 1$, $-2m^2 - m + 1 = 0$ 이므로

$m = -1$

따라서 $f(x) = -x + 3$ 이고

$f(-2) = -(-2) + 3 = 5$ 이다.

21. 함수 $f(x) = \frac{-3x+1}{x+3}$ 에 대하여 $f^1=f, f^{n+1} = f \circ f^n (n = 1, 2, 3, \dots)$

이라 할 때, $f^{2006}(-2) + f^{2007}(-2)$ 의 값은?

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

해설

$$f(-2) = \frac{6+1}{-2+3} = 7$$

$$f^2(-2) = f(f(-2)) = f(7) = -2$$

$$f^3(-2) = f(f^2(-2)) = f(-2) = 7$$

$$f^4(-2) = f(f^3(-2)) = f(7) = -2$$

⋮

$$f^{2006}(-2) = -2$$

$$f^{2007}(-2) = 7$$

$$\therefore f^{2006}(-2) + f^{2007}(-2) = -2 + 7 = 5$$

22. $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $b \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수는

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와

직선 $y = ax+b$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = |x-1|$ 에서

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = ||x-1|-1|$

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히

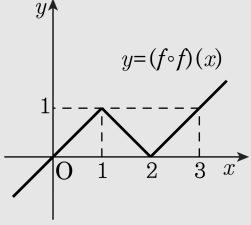
많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는

$y = -x+2$ 이어야 한다.

그런데, $b \neq 0$ 이므로 $y = -x+2$

따라서 $a = -1, b = 2$ 이므로 $ab =$

-2



23. 집합 $X = \{x \mid x \leq a, x \text{는 실수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 의 역함수가 존재할 때, a 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

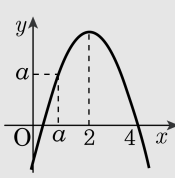
$f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

정의역, 공역은 모두 a 이하이고 $a \leq 2$, $f(a) =$

a

$$-a^2 + 4a = a \quad \therefore a = 0, 3$$

a 는 2보다 작아야 하므로 구하는 값은 0



24. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 $(f \circ g)(x) = 2x - 3, h(x) = 2x + 1$ 을 만족할 때, $(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(f \circ g)^{-1}(3) = a \text{ 로 놓으면 } (f \circ g)(a) = 3$$

$$2a - 3 = 3 \text{ 에서 } a = 3$$

$$\therefore (f \circ g)^{-1}(3) = 3$$

$$\therefore (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3) = (h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1})(3) = h^{-1}((f \circ g)^{-1}(3)) = h^{-1}(3)$$

$$h^{-1}(3) = b \text{ 놓으면 } h(b) = 3$$

$$2b + 1 = 3$$

$$\therefore b = 1$$

$$\therefore (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3) = h^{-1}(3) = 1$$

25. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6 (x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① -1 ② $-\sqrt{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

해설

함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프의 교점과 같다.

$y = x^2 - 4x + 6$ 과 $y = x$ 를 연립하면

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore x = 2, y = 2 \text{ 또는 } x = 3, y = 3$$

즉, 두 교점은 점 $(2, 2), (3, 3)$ 이다.

따라서, 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$