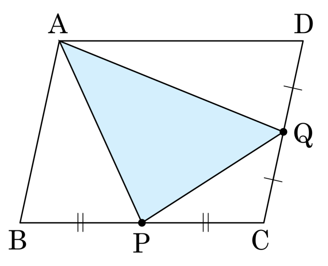
1. 다음과 같은 평행사변형 ABCD에서 두 점 P, Q는 각각 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$의 중점이다. $\square ABCD = 16\,cm^2$일 때, $\triangle APQ$의 넓이를 구하여라.



▶ 답: ______ cm^2

▷ 정답: $6\,cm^2$

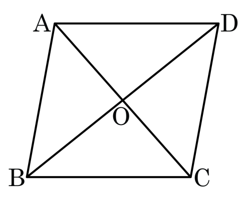
해설

$\triangle ABP = \triangle AQD = \frac{1}{4}\square ABCD$
$= \frac{1}{4} \times 16 = 4(cm^2)$

$\triangle PCQ = \frac{1}{8}\square ABCD = \frac{1}{8} \times 16 = 2(cm^2)$

$\therefore \triangle APQ$
$= \square ABCD - (\triangle ABP + \triangle AQD + \triangle PCQ)$
$= 16 - (4 + 4 + 2)$
$= 16 - 10$
$= 6(cm^2)$

2. 다음 그림의 평행사변형 ABCD 가 정사각형이 되기 위한 조건을 모두 고르면? (정답 2개)



① $\overline{AC} \perp \overline{DB}$, $\angle ABC = 90°$

② $\overline{AO} = \overline{BO}$, $\angle ADO = \angle DAO$

③ $\overline{AC} \perp \overline{DB}$, $\overline{AB} = \overline{AD}$

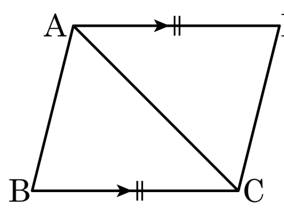
④ $\overline{OA} = \overline{OD}$, $\overline{AB} = \overline{AD}$

⑤ $\overline{AC} = \overline{DB}$, $\angle ABC = 90°$

해설

평행사변형이 정사각형이 되기 위해서는 두 대각선이 서로 수직이등분하고 한 내각의 크기가 $90°$ 이다.
또한 네 변의 길이가 같고, 네 내각의 크기가 같으면 정사각형이다.

3. 다음은 '한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같은 사각형은 평행사변형이다.' 를 증명하는 과정이다. 밑줄 친 부분 중 <u>틀린</u> 곳을 모두 고르면?



가정) □ABCD 에서 $\overline{AD} \,/\!/\, \overline{BC}$, ㄱ. $\underline{\overline{AD} = \overline{BC}}$

결론) $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{DC}$

증명) 대각선 AC를 그으면

△ABC 와 △CDA 에서

ㄱ. $\underline{\overline{AD} = \overline{BC}}$ (가정) ⋯㉠

ㄴ. $\underline{\angle DCA = \angle BAC}$ (엇각) ⋯㉡

ㄷ. $\underline{\overline{AC}}$ 는 공통 ⋯㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의해서 △ABC ≡ △CDA (ㄹ. <u>SAS</u> 합동)

ㅁ. $\underline{\angle DAC = \angle BCA}$ 이므로

∴ $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{DC}$

따라서 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로

□ABCD는 평행사변형이다.

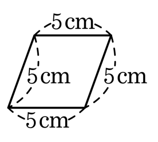
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄹ ⑤ ㅁ

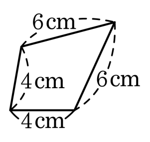
해설

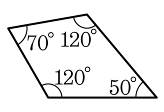
ㄴ. $\angle DCA = \angle BAC \rightarrow \angle DAC = \angle BCA$

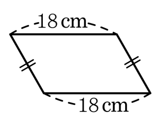
ㅁ. $\angle DAC = \angle BCA \rightarrow \angle DCA = \angle BAC$

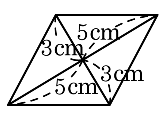
4. 다음 사각형 중에서 평행사변형을 모두 고르면?

①


②


③


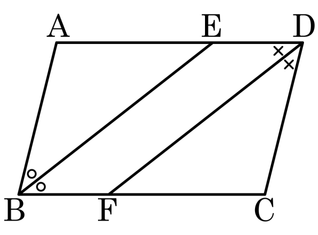
④


⑤


해설

①, ④두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
⑤두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.

5. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD 에서 $\angle B$ 와 $\angle D$ 의 이등분선이 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ 와 만나는 점을 각각 E, F 라 할 때, 다음 보기 중에서 옳은 것은 모두 몇 개인가?



보기

㉠ $\overline{AB} = \overline{AE}$　　㉡ $\overline{ED} = \overline{BF}$

㉢ $\overline{AE} = \overline{DC}$　　㉣ $\overline{BE} = \overline{FD}$

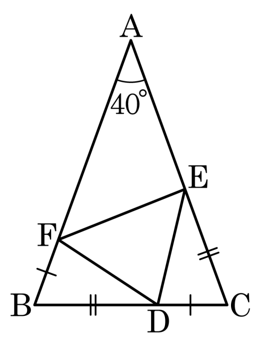
㉤ $\angle AEB = \angle DFC$　　㉥ $\angle ABE = \angle FDC$

① 2 개　② 3 개　③ 4 개　④ 5 개　⑤ 6 개

해설

사각형 BEDF 는 평행사변형이고,
$\triangle ABE \equiv \triangle CDF$ 이므로 ㉠~㉥ 모두 옳다.

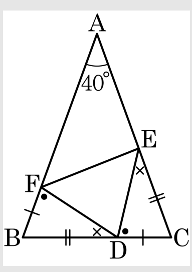
6. 다음 그림은 $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle A = 40°$ 인 이등변삼각형 ABC 의 변 위에 $\overline{BD} = \overline{CE}$, $\overline{CD} = \overline{BF}$ 가 되도록 점 D, E, F 를 잡은 것이다. 이 때, $\angle DEF$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 55°

해설



$\overline{BD} = \overline{CE}$, $\overline{CD} = \overline{BF}$ 이고, $\angle B = \angle C$ 이므로

$\triangle BDF \equiv \triangle CED$ ($\because$ SAS 합동)

$\angle BFD = \angle CDE$, $\angle BDF = \angle CED$ 이므로

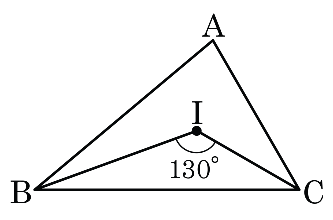
$$\begin{aligned}\angle EDF &= 180° - (\angle BDF + \angle CDE)\\ &= 180° - (\angle BDF + \angle BFD)\\ &= \angle B\end{aligned}$$

$\therefore \angle EDF = \angle B = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$

$\overline{DF} = \overline{DE}$ 이므로 $\triangle DEF$ 는 이등변삼각형이다.

$\therefore \angle DEF = \dfrac{1}{2}(180° - 70°) = 55°$

7. 다음 그림의 $\triangle ABC$의 내심을 I라 할 때, $\angle BIC = 130°$이면 $\angle A =$ (　　　)°이다. 빈칸을 채워 넣어라.



▶ 답 :

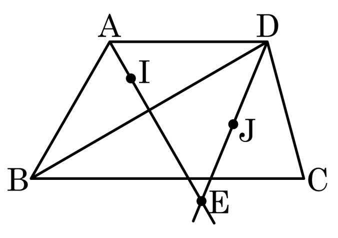
▷ 정답 : 80

해설

점 I가 $\triangle ABC$의 내심일 때, $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$이다.

$\therefore\ \angle A = (\angle BIC - 90°) \times 2 = (130° - 90°) \times 2 = 80°$

8. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{BD} = \overline{BC}$ 인 사다리꼴 ABCD 에서 삼각형 ABD, BCD 의 내심을 각각 I, J 라 정한다. 선분 AI 와 선분 DJ 의 연장선의 교점을 E 이고 $\angle DBC = 30°$ 라 할 때, $\angle IEJ$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답 : ____°

▷ 정답 : 52.5°

해설

선분 AD 와 선분 BC 가 평행하므로

$\angle ADB = \angle DBC = 30°$

또 $\triangle ABD$ 는 이등변삼각형이므로

$\angle BAD = 120°$

점 I 는 $\triangle ABD$ 의 내심이므로

$\angle IAD = \frac{1}{2}\angle BAD = 60°$

또 $\triangle BCD$ 도 이등변삼각형이므로

$\angle BCD = \angle BDC = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$

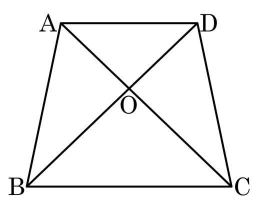
점 J 는 $\triangle BCD$ 의 내심이므로

$\angle BDJ = \frac{1}{2}\angle BDC = \frac{1}{2} \times 75 = 37.5°$

$\triangle AED$ 에서 $60° + \angle IEJ + 37.5° + 30° = 180°$

$\therefore \angle IEJ = 52.5°$

9. 다음 그림에서 $\overline{AD} : \overline{BC} = 2 : 3$ 이고, $\triangle AOD = 24\,\mathrm{cm}^2$ 일 때, 사다리꼴 ABCD 의 넓이를 구하시오.



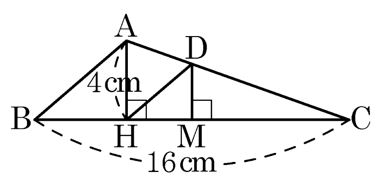
▶ 답 : ______ cm^2

▷ 정답 : $150\,\mathrm{cm}^2$

해설

$\triangle AOD$ 와 $\triangle BOC$ 는 닮음이고 닮음비는 $2 : 3$
이때, $\overline{OD} : \overline{OB} = 2 : 3$ 이므로
$\triangle AOD : \triangle AOB = 2 : 3,\ \triangle AOB = 36\,\mathrm{cm}^2$
$\triangle DOC = 36\,\mathrm{cm}^2$
그리고 $\overline{OA} : \overline{OC} = 2 : 3$ 이므로
$\triangle OAB : \triangle BOC = 2 : 3$
$\therefore\ \triangle BOC = 54\,\mathrm{cm}^2$
따라서 $\square ABCD = 24 + 36 + 36 + 54 = 150\ (\mathrm{cm}^2)$

10. 다음 그림에서 점 M 은 $\overline{BC}$ 의 중점일 때, $\triangle DHC$ 의 넓이는?



① $4\,cm^2$ ② $8\,cm^2$ ③ $12\,cm^2$

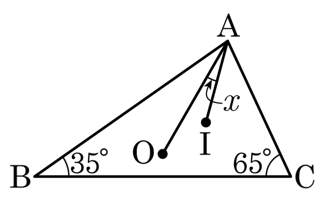
④ $14\,cm^2$ ⑤ $16\,cm^2$

해설

$\overline{AM}$ 을 그으면, $\triangle DHM = \triangle AMD$ 이므로,

$\triangle DHC = \triangle AMC = \frac{1}{2}\triangle ABC = 16\ (cm^2)$

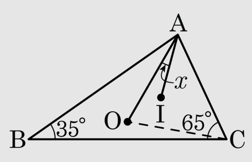
11. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\angle B = 35^\circ$, $\angle C = 65^\circ$ 이고, 점 O 와 점 I 는 각각 $\triangle ABC$ 의 외심과 내심일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



① 10° ② 12° ③ 15° ④ 18° ⑤ 20°

해설

점 O 와 점 C 를 이으면,

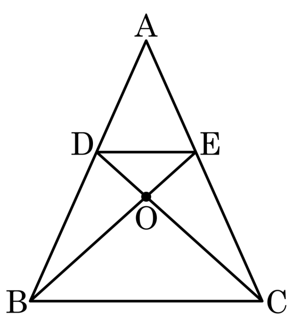


i) $\angle B = 35^\circ$ 이므로 $\angle AOC = 70^\circ$, $\angle OAC = \frac{1}{2}(180^\circ - 70^\circ) = 55^\circ$ $\therefore \angle OAC = 55^\circ$

ii) $\angle A = 180^\circ - (35^\circ + 65^\circ) = 80^\circ$ 이므로 $\angle IAC = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$

$\angle x = \angle OAC - \angle IAC = 55^\circ - 40^\circ = 15^\circ$ $\therefore$ $\angle x = 15^\circ$

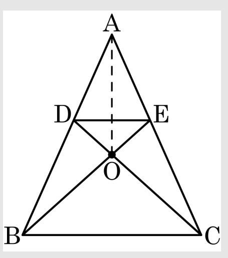
12. 다음 그림에서 점 O 는 삼각형 ABC 의 외심이고, $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{CE}$ 일 때, $\angle BOC$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답 : ______ °

▷ 정답 : 120°

해설



$\angle DBE = x$, $\angle ECD = y$ 라 하면 $\triangle DBE$, $\triangle ECD$ 는 이등변삼각형이므로

$\angle DEB = \angle DBE = x$, $\angle ECD = \angle EDC = y$

점 O 가 $\triangle ABC$ 의 외심이므로 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$

즉, $\triangle OAB$, $\triangle OAC$ 는 이등변삼각형이므로

$\angle OAB = \angle OBA = x$, $\angle OAC = \angle OCA = y$

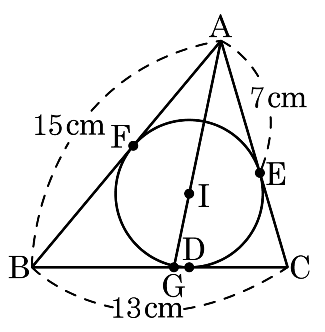
한편 외심의 성질에 의해 $\angle BOC = 2\angle A$ 이므로

$\angle DOE = \angle BOC$(맞꼭지각) $= 2(x+y)$

따라서 $\triangle ODE$ 에서 $y + x + 2(x+y) = 180°$, $x + y = \angle A = 60°$

$\therefore\ \angle BOC = 2\angle A = 120°$

13. 다음 그림에서 점 I 는 $\triangle ABC$ 의 내심이다. $\overline{AB} = 15\text{cm}$, $\overline{AE} = 7\text{cm}$, $\overline{BC} = 13\text{cm}$ 일 때, $\overline{GD}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $\frac{7}{9}$ cm

해설

원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

$\overline{AE} = \overline{AF} = 7\text{cm}$ 이므로 $\overline{BF} = 15 - 7 = 8\text{cm}$

$\overline{BF} = \overline{BD} = 8\text{cm}$ 이므로 $\overline{DC} = 13 - 8 = 5\text{cm}$

$\overline{CE} = \overline{CD} = 5\text{cm}$

$\therefore\ \overline{AC} = 12\text{cm}$

또한, $\overline{GD} = x\text{cm}$ 라 하면 $\overline{BD} = 8\text{cm}$, $\overline{DC} = 5\text{cm}$ 이므로 $\overline{BG} = 8 - x(\text{cm})$, $\overline{GC} = x + 5(\text{cm})$

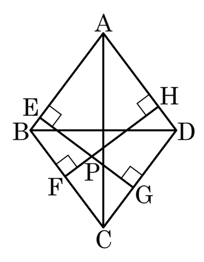
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BG} : \overline{GC}$

$15 : 12 = (8 - x) : (x + 5)$

$\therefore\ x = \frac{7}{9}$

따라서 $\overline{GD} = \frac{7}{9}\text{cm}$ 이다.

14. 다음 그림과 같은 마름모 ABCD 에서 $\overline{AC} = 8\text{cm}$, $\overline{BD} = 6\text{cm}$, $\overline{AD} = 5\text{cm}$ 이다. 마름모 ABCD 의 내부에 한 점 P 를 잡을 때, 점 P 에서 네 변에 내린 수선의 길이의 합인 $\overline{PE} + \overline{PF} + \overline{PG} + \overline{PH}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $\frac{48}{5}$ cm

해설

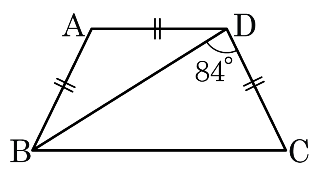
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 5\text{cm}$ 이고

$\square ABCD = \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PCD + \triangle PDA$

$\frac{1}{2} \times 8 \times 6 = \frac{1}{2} \times 5 \times (\overline{PE} + \overline{PF} + \overline{PG} + \overline{PH})$

$\therefore \overline{PE} + \overline{PF} + \overline{PG} + \overline{PH} = \frac{48}{5}$ cm이다.

15. 다음 그림과 같은 등변사다리꼴 ABCD 에서 $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\angle BDC = 84°$ 일 때, $\angle C$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답 : ____°

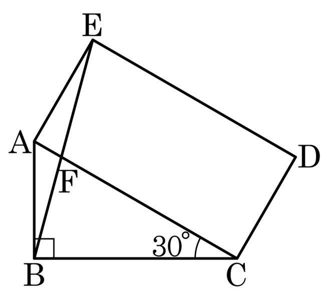
▷ 정답 : 64°

해설

$\angle ADB = \angle DBC = \frac{1}{2}\angle C$

$\frac{1}{2}\angle C + \angle C = 96°$ 이므로, $\angle C = 64°$

16. 다음 그림에서 $\triangle ABC$ 는 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형이고, □ACDE 는 직사각형이다. $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, $\angle ACB = 30°$ 일 때, $\angle DEF$ 와 $\angle EFC$ 의 크기의 차는?



① 30°　② 32°　③ 34°　④ 36°　⑤ 38°

해설

$\overline{AC}$ 의 중점 O 를 잡으면 점 O 는 $\triangle ABC$ 의 외심으로 $\overline{AE} = \overline{AO} = \overline{OC} = \overline{OB}$ 이다.
$\angle BAC = 60°$ 이므로
$\angle EAB = 60° + 90° = 150°$
$\angle ABE = \angle AEB = (180° - 150°) \div 2 = 15°$
$\angle DEF = 90° - 15° = 75°$
$\angle EFC = 90° + 15° = 105°$
$\therefore \angle EFC - \angle DEF = 105° - 75° = 30°$