1. 다음은 점 $P(a,\ b)$ 의 직선 $y=x$ 에 대해 대칭인 점 Q의 좌표 $(x,\ y)$ 를 구하는 과정이다.
$\boxed{}$ 에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

(1) $\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\dfrac{x+a}{2},\ \dfrac{y+b}{2}\right)$ 은 직선
$\boxed{}$ 위에 있으므로 $\dfrac{y+b}{2}=\dfrac{x+a}{2}$
$\therefore x-y=b-a\cdots①$
(2) 직선 PQ 는 직선 $y=x$ 에 수직이므로
$\dfrac{y-b}{x-a}=\boxed{}$
①, ② 를 연립하여 x , y 를 구하면
$x=\boxed{}$, $y=\boxed{}$이다.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

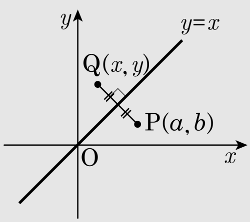
▷ 정답: $y=x$

▷ 정답: -1

▷ 정답: b

▷ 정답: a

해설



2. 포물선 $y = x^2 - 2x$ 를 f : $(x,\ y) \rightarrow (x - a,\ y - 1)$ 에 의하여 평행이동한 곡선과 직선 $y = 2x$ 와의 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = x^2 - 2x$ 를 주어진 조건에 의하여

평행이동하면 $(y + 1) = (x + a)^2 - 2(x + a)$

$y = x^2 + (2a - 2)x + a^2 - 2a - 1$

이 곡선이 직선 $y = 2x$ 와 접하므로

y 에 $2x$ 를 대입하여 정리하면

$x^2 + (2a - 4)x + a^2 - 2a - 1 = 0$ 이고

이 방정식의 두 근이 두 교점이 된다.

두 교점의 x좌표를 $x_1,\ x_2$ 라 하면

$x_1 + x_2 = -(2a - 4)$

$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-(2a - 4)}{2} = 0$ 이므로 a 의 값은 2

3. 직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를 이등분하였다. 이때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동하면 $-2x+3y-1=0$

이 직선을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면

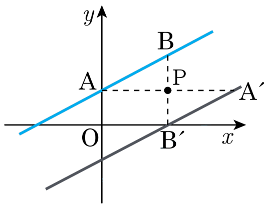
$-2y+3x-1=0$

$\therefore 3x-2y-1=0$

이 직선이 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(1, a)$ 를 지난다.

즉, $3-2a-1=0, 2a=2 \quad \therefore a=1$

4. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 한 점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점은 각각 A′, B′ 이고, 직선 AB 의 방정식은 $x-2y+4=0$ 이라 한다. 점 A′ 의 좌표가 $(3,1)$, 직선 A′B′ 의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, 두 상수 a,b 의 곱은?



① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{3}$

해설

두 점 A′, B′ 은 각각 점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점이므로 직선 A′B′ 은 직선 AB 의 점대칭도형이다.

즉, $\triangle APB \equiv \triangle A'PB'$ 에서

$\angle ABP = \angle A'B'P$ (엇각) 이므로

$\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{A'B'}$

따라서, 직선 A′B′ 의 기울기는 직선 AB 의 기울기인 $\frac{1}{2}$ 과 같다.

또, 직선 A′B′ 은 점 A′ $(3,1)$ 을 지나므로 직선 A′B′ 의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}(x-3)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

따라서, $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$ 이므로

$ab=-\frac{1}{4}$

5. 두 점 $A(3,4), B(2,5)$ 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ -1 ④ 3 ⑤ 0

해설

중점이 $y = ax + b$ 위의 점이므로,

$\frac{9}{2} = a \cdot \frac{5}{2} + b \rightarrow 5a + 2b = 9$

선분AB 와 $y = ax + b$ 는 서로 수직이므로,

선분AB 의 기울기 : $\frac{4-5}{3-2} = -1$

따라서, $a = 1$

$5 \cdot 1 + 2b = 9$

$\therefore\ 2b = 4 \quad \therefore\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 1 + 2 = 3$

6. 점 A 를 직선 l : $y=2x+3$ 에 대하여 대칭이동을 한 점을 점 B 라고 할 때, 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① 점 A 와 점 B 의 중점은 직선 l 을 지난다.

② $\overline{AB}$ 와 직선 l 은 직교한다.

③ 점 A 를 지나는 임의의 직선 m 을 l 에 대하여 대칭이동을 하여 생기는 직선은 반드시 점 B 를 지난다.

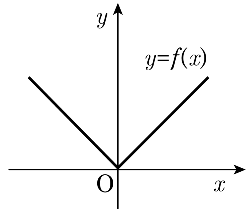
④ 점 A 를 지나는 직선 m 을 직선 l 에 대칭이동을 하여 생긴 직선을 m' 라고 할 때, m 과 m' 의 기울기가 같은 직선 m 은 오직 하나 뿐이다.

⑤ 점 B 를 직선 l 에 대하여 대칭이동을 한 점은 A 이다.

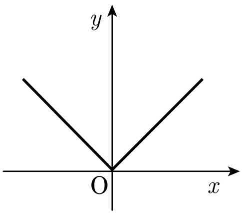
해설

점 A 를 지나는 직선 m 을 직선 l 에
대칭이동을 하여 생긴 직선을 m' 라고 할 때,
m 과 m' 의 기울기가 같은 직선 m 은
직선 l과 평행한 경우와 수직인 경우 2가지이다.

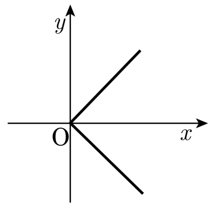
7. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중
$y = -f(-x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



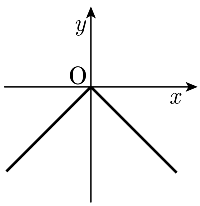
①



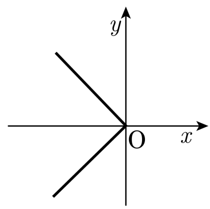
②



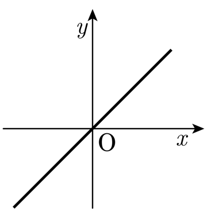
③



④



⑤



해설

$y = -f(-x)$, 즉 $-y = f(-x)$ 는 $y = f(x)$ 에
x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입한 것이므로
$y = f(x)$ 의 그래프를 원점에 대하여
대칭이동한 것이다.
따라서, $y = -f(-x)$ 의 그래프의 개형으로
옳은 것은 ③이다.

8. 다음 중 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$

② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

④ $(x+1)^2+y^2=2$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 1 인 ②이다.

9. 방정식 $f(x, y) = 0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동시키는 것을 A, y축에 대하여 대칭 이동시키는 것을 B, 원점에 대하여 대칭 이동시키는 것을 C, 직선 $y = x$에 대하여 대칭 이동시키는 것을 D라 하자. 직선 $2x + y + 1 = 0$ 을 $A \to B \to C \to D \to C \to B \to A$의 순서로 대칭 이동시킨 도형의 방정식은? (단, $A \to B$는 A에 의하여 대칭 이동시킨 후 다시 B에 의하여 대칭 이동시키는 것을 뜻한다.)

① $2x + y + 1 = 0$ ② $2x + y - 1 = 0$ ③ $x + 2y - 1 = 0$
④ $x + 2y + 1 = 0$ ⑤ $x - 2y - 1 = 0$

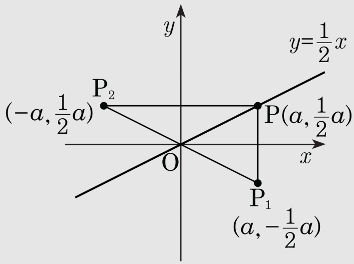
해설

$2x + y + 1 = 0$을 A(x축 대칭)하면 $2x - y + 1 = 0$
B(y축 대칭)하면 $-2x - y + 1 = 0$
C(원점 대칭)하면 $2x + y + 1 = 0$이므로
$A \to B \to C$, $C \to B \to A$에 의하여 도형은 자기 자신으로 옮겨진다.
$2x + y + 1 = 0$을 D(직선 $y = x$ 대칭)하면 $2y + x + 1 = 0$
$\therefore x + 2y + 1 = 0$

10. 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점 P(a, b)를 x 축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 점을 P_1, P_2라 하자. $\triangle PP_1P_2$ 의 넓이가 4일 때, 두 양수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설



점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점이므로 $P\left(a,\ \frac{1}{2}a\right)$, x축 대칭 : $P_1\left(a,\ -\frac{1}{2}a\right)$, y축 대칭 : $P_2\left(-a,\ \frac{1}{2}a\right)$

$\triangle PP_1P_2$는 $\angle P_1PP_2 = 90°$인 직각삼각형으로 넓이는 $\overline{PP_1} \times \overline{PP_2} \times \frac{1}{2}$이다.

$\overline{PP_1}=a$, $\overline{PP_2}=2a$

$\therefore a \times 2a \times \frac{1}{2} = 4$

$a=\pm 2$

$a>0$이므로 $a=2$, $b=\frac{1}{2}a=1$

$\therefore a+b=3$