

1. 다음은 점 $P(a, b)$ 의 직선 $y = x$ 에 대해 대칭인 점 Q 의 좌표 (x, y) 를 구하는 과정이다.

에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

(1) \overline{PQ} 의 중점 $\left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right)$ 은 직선

위에 있으므로 $\frac{y+b}{2} = \frac{x+a}{2}$

$$\therefore x - y = b - a \cdots \textcircled{1}$$

(2) 직선 PQ 는 직선 $y = x$ 에 수직이므로

$$\frac{y-b}{x-a} = \text{$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 연립하여 x, y 를 구하면

$x = \text{}, y = \text{$ 이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

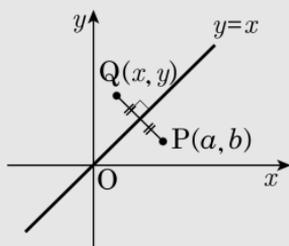
▷ 정답 : $y = x$

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : b

▷ 정답 : a

해설



2. 포물선 $y = x^2 - 2x$ 를 $f : (x, y) \rightarrow (x-a, y-1)$ 에 의하여 평행이동한 곡선과 직선 $y = 2x$ 와의 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$y = x^2 - 2x$ 를 주어진 조건에 의하여
평행이동하면 $(y+1) = (x+a)^2 - 2(x+a)$

$$y = x^2 + (2a-2)x + a^2 - 2a - 1$$

이 곡선이 직선 $y = 2x$ 와 접하므로

y 에 $2x$ 를 대입하여 정리하면

$$x^2 + (2a-4)x + a^2 - 2a - 1 = 0 \text{ 이고}$$

이 방정식의 두 근이 두 교점이 된다.

두 교점의 x 좌표를 x_1, x_2 라 하면

$$x_1 + x_2 = -(2a-4)$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-(2a-4)}{2} = 0 \text{ 이므로 } a \text{ 의 값은 } 2$$

3. 직선 $2x - 3y - 1 = 0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 원 $(x - 1)^2 + (y - a)^2 = 5$ 의 넓이를 이등분하였다. 이때, a 의 값은?

① 1

② 2

③ $\sqrt{5}$

④ 3

⑤ $2\sqrt{5}$

해설

직선 $2x - 3y - 1 = 0$ 을 원점에 대하여

대칭이동하면 $-2x + 3y - 1 = 0$

이 직선을 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$-2y + 3x - 1 = 0$$

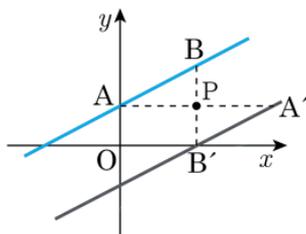
$$\therefore 3x - 2y - 1 = 0$$

이 직선이 원 $(x - 1)^2 + (y - a)^2 = 5$ 의 넓이를

이등분하므로 원의 중심 $(1, a)$ 를 지난다.

$$\text{즉, } 3 - 2a - 1 = 0, 2a = 2 \quad \therefore a = 1$$

4. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 한 점 P에 대한 두 점 A, B의 대칭점은 각각 A', B'이고, 직선 AB의 방정식은 $x - 2y + 4 = 0$ 이라 한다. 점 A'의 좌표가 (3, 1), 직선 A'B'의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, 두 상수 a, b의 곱은?



① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{3}$

③ $-\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

두 점 A', B'은 각각 점 P에 대한 두 점 A, B의 대칭점이므로 직선 A'B'은 직선 AB의 점대칭도형이다.

즉, $\triangle APB \cong \triangle A'PB'$ 에서
 $\angle ABP = \angle A'B'P$ (엇각)이므로

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$$

따라서, 직선 A'B'의 기울기는 직선 AB의 기울기인 $\frac{1}{2}$ 과 같다.

또, 직선 A'B'은 점 A'(3, 1)을 지나므로 직선 A'B'의 방정식은

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

따라서, $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$ab = -\frac{1}{4}$$

5. 두 점 $A(3, 4), B(2, 5)$ 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ -1

④ 3

⑤ 0

해설

중점이 $y = ax + b$ 위의 점이므로,

$$\frac{9}{2} = a \cdot \frac{5}{2} + b \rightarrow 5a + 2b = 9$$

선분 AB 와 $y = ax + b$ 는 서로 수직이므로,

$$\text{선분 } AB \text{ 의 기울기} : \frac{4-5}{3-2} = -1$$

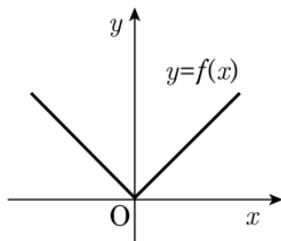
따라서, $a = 1$

$$5 \cdot 1 + 2b = 9$$

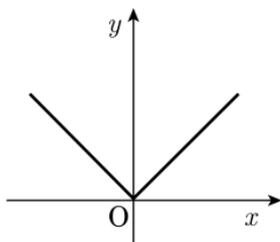
$$\therefore 2b = 4 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a + b = 1 + 2 = 3$$

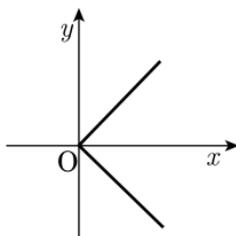
6. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 $y = -f(-x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



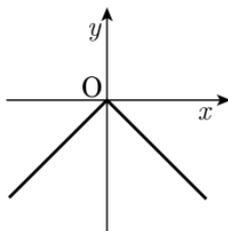
①



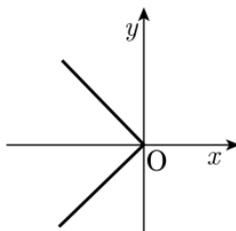
②



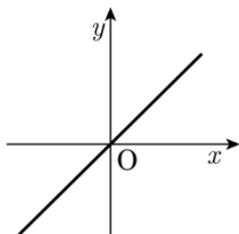
③



④



⑤



해설

$y = -f(-x)$, 즉 $-y = f(-x)$ 는 $y = f(x)$ 에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입한 것이므로 $y = f(x)$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.
따라서, $y = -f(-x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은 ③이다.

7. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = \frac{1}{5}$

② $x^2 + y^2 = 3$

③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 16$

④ $(x + 1)^2 + y^2 = 4$

⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{3}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 8x + 8y + 16 = 0$ 에서 $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 4인 ③이다.

8. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동시키는 것을 A , y 축에 대하여 대칭 이동시키는 것을 B , 원점에 대하여 대칭 이동시키는 것을 C , 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동시키는 것을 D 라 하자. 직선 $2x + y + 1 = 0$ 을 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ 의 순서로 대칭 이동시킨 도형의 방정식은? (단, $A \rightarrow B$ 는 A 에 의하여 대칭 이동시킨 후 다시 B 에 의하여 대칭 이동시키는 것을 뜻한다.)

① $2x + y + 1 = 0$ ② $2x + y - 1 = 0$ ③ $x + 2y - 1 = 0$

④ $x + 2y + 1 = 0$ ⑤ $x - 2y - 1 = 0$

해설

$2x + y + 1 = 0$ 을 A (x 축 대칭)하면 $2x - y + 1 = 0$

B (y 축 대칭)하면 $-2x - y + 1 = 0$

C (원점 대칭)하면 $2x + y + 1 = 0$ 이므로

$A \rightarrow B \rightarrow C$, $C \rightarrow B \rightarrow A$ 에 의하여 도형은 자기 자신으로 옮겨진다.

$2x + y + 1 = 0$ 을 D (직선 $y = x$ 대칭)하면 $2y + x + 1 = 0$

$\therefore x + 2y + 1 = 0$