

1. 전체집합 $U = \{10, 20, 30, 40, 50\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 $A \cup B = U$, $A \cap B = \{30, 50\}$ 을 만족한다. 집합 A, B 의 원소의 합을 각각 $S(A)$, $S(B)$ 라고 할 때, $S(A) + S(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 230

해설

$S(A) + S(B)$ 의 값을 구하는 것이므로
각 원소를 아무렇게나 배열해도 원소의 합은 같다.
 $\therefore 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + (30 + 50) = 230$

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{2, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16\}$, $B = \{1, 3, 8, 10, 13, 16\}$ 이고 $B \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족할 때 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

- ① $B \subset X$

② $X \subset (A \cup B)$

③ $(A \cap B) \subset X \subset B$

④ $(A \cap B) \subset X \subset A$

⑤ $\{10, 13\} \subset X$

해설

$B \cap X = X$ 일 때 $X \subset B$ 이고 $(A \cap B) \cup X = X$ 이면 $(A \cap B) \subset X$ 를 만족한다.

- ① $X \subset B$ 이므로 옳지 않다.
- ④ $(A \cap B) \subset X \subset B$ 이지만 $X \subset A$ 라고 할 수 없기 때문에 $(A \cap B) \subset X \subset A$ 라고 할 수 없다.
- ⑤ $\{10, 13\} \subset A \cap B$ 이므로 $\{10, 13\} \subset X$ 이다.

3. 실수 전체의 집합의 부분집합 A 가 다음의 두 조건을 만족한다.

- $(\heartsuit) 1 \in A$
 $(\spadesuit) a \in A$ 이면 $\sqrt{2}a \in A$

이 때, 다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- $\textcircled{1}$ 집합 A 는 유한집합이다.
- $\textcircled{2}$ 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.
- $\textcircled{3}$ 집합 A 의 원소 중 가장 작은 수는 1 이다.

- $\textcircled{1} \textcircled{1}$
- $\textcircled{2} \textcircled{2}$
- $\textcircled{3} \textcircled{3}$
- $\textcircled{4} \textcircled{1}, \textcircled{2}$
- $\textcircled{5} \textcircled{2}, \textcircled{3}$

해설

- $\textcircled{1}$ 조건 $(\heartsuit)$ 에서 $1 \in A$ 이므로 조건 $(\spadesuit)$ 에 의하여
 $\sqrt{2} \in A, (\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^3 \in A, \dots$,
즉, $(\sqrt{2})^n$ (n 은 자연수) 꼴로 나타나는 수는 모두 집합 A 의
원소이므로 A 는 무한집합이다.
- $\textcircled{2}$ $\textcircled{1}$ 에서 $(\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^4 \in A, (\sqrt{2})^6 \in A, \dots$,
즉 $2 \in A, 2^2 \in A, 2^3 \in A, \dots$ 이므로 임의의 자연수 n 에
대하여 $2^n \in A$ 이다.
- $\textcircled{3}$ (반례)
집합 $A = \{0, 1, \sqrt{2}, (\sqrt{2})^2, (\sqrt{2})^3, \dots\}$ 은 주어진 조건 $(\heartsuit)$,
 $(\spadesuit)$ 를 모두 만족하지만 원소 중 가장 작은 수는 0 이다.
이상에서 옳은 것은 $\textcircled{2}$ 뿐이다.

4. 다음을 만족하는 집합을 조건제시법으로 알맞게 나타내지 않은 것을 고르면?

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어져있다.
원소들은 각각 2 개의 약수만을 가진 수이다.
원소는 10 미만의 자연수이다.

- ① $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 미만의 소수}\}$ ② $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 소수}\}$
③ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 미만의 소수}\}$ ④ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 소수}\}$
⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 소수}\}$

해설

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어진 집합이므로 원소의 개수는 4 개임을 알 수 있다.
원소들은 각각 2 개의 약수만을 가지므로 소수임을 알 수 있다.
원소는 10 미만의 소수이므로 $\{2, 3, 5, 7\}$ 임을 알 수 있다.
① $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5\}$
② $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
③ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
④ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$

5. 다음 안에 알맞은 세 자연수의 합을 구하여라.

보기

㉠ $n(\{x|x\text{는 } \square\text{미만의 자연수}\}) = 4$

㉡ $n(\{a, b, c, d\}) - n(\{b, c, d\}) = \square$

㉢ $A \subset \{1, 2, 3\}$ 이고, $n(A) = 2$ 를 만족하는 집합 A 의 개수는 개이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

㉠ $n(\{x|x\text{는 } 5\text{ 미만의 자연수}\}) = 4$

㉡ $n(\{a, b, c, d\}) - n(\{b, c, d\}) = 1$

㉢ $A \subset \{1, 2, 3\}$ 이고, $n(A) = 2$ 를 만족하는 집합 A 는 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ 의 3 개

$\therefore 5 + 1 + 3 = 9$

6. 두 집합 $A = \{4, 6, a, 10\}$, $B = \{3a, 4 - b\}$ 에 대하여 $B \subset A$ 일 때, 자연수 $a - b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 0 보다 크고 4 와 같거나 작다.)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$B \subset A$ 이므로 집합 B 의 모든 원소는 A 에도 포함된다.

$3a \in A$, $4 - b \in A$

a 는 0 보다 크고 4 이하인 자연수라 했으므로, 4 와 10 과 a 는 $3a$ 가 될 수 없다.

따라서 $3a = 6$ 이다. $\therefore a = 2$

$A = \{2, 4, 6, 10\}$

b 역시 0 보다 크고 4 이하인 자연수라 했으므로, $4 - b = 2$ 이어야 한다.

$\therefore b = 2$

따라서 $a - b$ 는 0 이다.

7. 집합 $A = \{1, 2\}$ 에 대하여 집합 B 는 집합 A 의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합일 때, 집합 B 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 16 개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수는
 $2^2 = 4$ (개) 이므로 $n(B) = 4$ 이다.
따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는
 $2^{n(B)} = 2^4 = 16$ (개) 이다.

8. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 X 의 모든 원소의 합이 홀수일 때, 집합 X 의 개수는?

① 24개 ② 32개 ③ 40개 ④ 48개 ⑤ 56개

해설

(X 의 모든 원소의 합이 홀수) $\rightarrow X$ 의 원소 중 홀수의 개수가 홀수 개

i) 홀수의 개수가 1개 일 때 짝수로만 이루어진 부분집합에 1, 3, 5 중에 1개가 들어가면 된다. 짝수로만 이루어진 부분집합의 수 : $2^{6-3} = 8 \therefore 8 \times 3 = 24(\text{개})$

ii) 홀수의 개수가 3개 일 때 $2^{6-3} = 8(\text{개})$

$\therefore 24 + 8 = 32$

9. 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- $\neg n(\{0\}) = 0$
- $\mathbb{L} \phi \subset \{\emptyset\}$
- $\mathbb{E} 4 \subset \{1, 2\}$
- $\mathbb{E} 0 \subset \{0\}$
- $\mathbb{E} 0 \in \emptyset$
- $\mathbb{H} 0 \notin \emptyset$

- ①

$\mathbb{L}, \mathbb{H}$
- ②

$\mathbb{L}, \mathbb{H}$
- ③

$\neg, \mathbb{L}$
- ④

$\mathbb{E}, \mathbb{H}$
- ⑤

$\mathbb{H}, \mathbb{E}$

해설

- $\neg n(\{0\}) = 1$
- $\mathbb{E} 4 \notin \{1, 2\}$
- $\mathbb{E} 0 \in \{0\}$
- $\mathbb{H} 0 \notin \emptyset$

10. 두 집합 $A = \{1, 2, 4, 5, 7\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5\text{이하의 홀수}\}$ 에 대하여 $X \cap A = X$ 와 $X \cup (A \cap B) = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

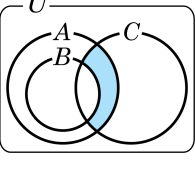
▷ 정답 : 8 개

해설

$X \cap A = X$ 이므로 $X \subset A$
 $X \cup (A \cap B) = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$
 $A \cap B = \{1, 5\}$
 $\{1, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 4, 5, 7\}$
집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 1, 5를 반드시 포함하는 집합이다.
 $\therefore 2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

11. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?

- ① $A - (B \cap C)$
- ② $(A - B) \cap C$
- ③ $(A \cup B) - C$
- ④ $(A \cup C) - B$
- ⑤ $(A \cap B) \cup C$



해설

①

③

④

⑤

12. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.

보기

- ㉠ $B \subset A$ 이면 $n(B) < n(A)$ 이다.
- ㉡ $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
- ㉢ $A = \{\emptyset\}$ 이면 $n(A) = 0$ 이다.
- ㉣ U^c 은 모든 집합의 부분집합이다.
- ㉤ $A - B = B - A$ 이면 $(A \cup B) \subset B$ 이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉡

▶ 정답 : ㉣

▶ 정답 : ㉤

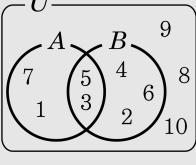
해설

- ㉠ $B \subset A$ 이면 $n(B) \leq n(A)$ 이다.
- ㉢ $A = \{\emptyset\}$ 이면 $n(A) = 1$ 이다.
- ㉣ $U^c = \emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이다.
- ㉤ $A - B = B - A$ 이면 $A = B$ 이므로 $(A \cup B) \subset B$ 이다.

13. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A = \{1, 3, 5, 7\}, A \cap B = \{3, 5\}, B \cap A^c = \{2, 4, 6\}, A^c \cap B^c = \{8, 9, 10\}$
일 때, B^c 은?
- ① $\{1, 7\}$ ② $\{1, 8\}$ ③ $\{1, 7, 9, 10\}$
④ $\{1, 7, 8, 10\}$ ⑤ $\{1, 7, 8, 9, 10\}$

해설

$B \cap A^c = \{2, 4, 6\} = B - A$ 이므로
 $B^c = U - B = \{1, 7, 8, 9, 10\}$ 이다.



14. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 한 자리 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B = \{2, 4, 6, 8\}, A^c = \{6, 7, 8, 9\}, A^c \cap B^c = \{7, 9\}$ 일 때, $(A - B)^c$ 를 구하여라.

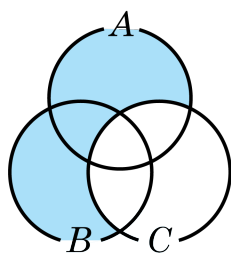
▶ 답 :

▷ 정답 : $\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $A = U - A^c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로
 $A - B = \{1, 3, 5\}$
 $\therefore (A - B)^c = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

15. 다음 그림에서 색칠한 부분의 집합을 나타낸 것은?



- ① $(A \cap B) - C$ ② $(A \cap C) - B$ ③ $(A \cup B) - C$
④ $(A \cup C) - B$ ⑤ $(B \cup C) - A$

해설

색칠한 부분을 집합으로 나타내면 $(A \cup B) - C$ 이다.

16. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 세 부분집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{1, 2, 5\}$ 에서 $A \star B = (A - B) \cup (B - A)$ 라 할 때, 집합 $(A \star B) \star C$ 의 원소의 합을 구하면?

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} A \star B &= (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 4\} \\ \{1, 2, 4\} \star C &= (\{1, 2, 4\} - C) \cup (C - \{1, 2, 4\}) \\ &= \{4, 5\} \\ \therefore (A \star B) \star C &= \{4, 5\} \end{aligned}$$

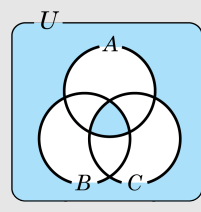
17. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합
 $A = \{x|x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}$,
 $B = \{x|x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 4 \text{의 배수}\}$,
 $C = \{1, 2, 5, 7, 11, 12\}$ 에 대하여 $A \Delta B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 일 때,
 $n((A \Delta B) \cap (A \Delta C))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 정답 : 6

해설

$(A \Delta B) \cap (A \Delta C)$ 를 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$$n(A \cap B \cap C) = 1, \quad n((A \cup B \cup C)^c) = 5$$

$$\therefore n((A \Delta B) \cap (A \Delta C)) = 1 + 5 = 6$$

18. 전체집합 U 의 임의의 부분집합을 A 라 하고 조건 p, q 를 만족시키는 집합을 P, Q 라 하자. $(A \cap P) \cup (A^c \cap Q) = (A \cap P) \cup Q$ 가 성립할 때 다음 중 참인 명제는?

① $\sim q \rightarrow p$

② $p \rightarrow q$

③ $p \leftrightarrow q$

④ $q \rightarrow p$

⑤ $q \rightarrow \sim p$

해설

집합 A 가 전체집합 U 의 임의의 부분집합이므로 $A = U$ 라 놓으면, 좌변 : $(U \cap P) \cup (\emptyset \cap Q) = P \cup \emptyset = P$
우변 : $(U \cap P) \cup Q = P \cup Q \therefore P = P \cup Q$ 이므로 $Q \subset P$
 $\therefore q \rightarrow p$ 는 참이다.

19. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

- ① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$
- ② $x + y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$
- ③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$
- ④ $x \leq 2$ 이면 $|x - 1| \leq |x - 3|$
- ⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

- ① 거짓 : (반례) $x = -2, y = -1$ 일 때,
 $xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.
- ② 거짓 : (반례) $x = -2, y = 3$ 일 때,
 $x + y = -2 + 3 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $3 > 0$ 이다.
- ③ 거짓 : (반례) $x = 2, y = -2$ 일 때,
 $2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
- ④ $|x - 1| \leq |x - 3|$ 의 양변을 제곱하면
 $x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 6x + 9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
- ⑤ 명제 ‘ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$ ’ 은 참이지만, 그의 역 ‘ $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$ ’은 거짓이다.

20. 두 명제「겨울이 오면 춥다.」, 「추우면 눈이 온다.」가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은 ?
- ① 눈이 오지 않으면 춥지 않다.
 - ② 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
 - ③ 겨울이 오면 눈이 온다.
 - ④ 눈이 오면 겨울이 온다.
 - ⑤ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

해설

p : 겨울이 온다. q : 춥다. r : 눈이 온다.
라 하면 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이다.
① $q \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim q$ (대우 명제)
② $p \Rightarrow q$ 이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$ (대우 명제)
③ $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이므로
 $p \Rightarrow r$ (삼단논법)
④ $p \Rightarrow r$ 이라 해서 반드시 $r \Rightarrow p$ 인 것은 아니다.
⑤ $p \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim p$ (대우명제)

21. 다음 중 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은? (단, A^c 는 전체집합 U 에 대한 A 의 여집합)

- ① $A = B$
- ② $B \subset A$
- ③ $A \subset B$
- ④ $A \cap B = \emptyset$
- ⑤ $A \cup B = \emptyset$

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A - B) \cup (B - A)$
따라서 $(A - B) \cup (B - A) = B \cap A^c$ 에서 $(A - B) \cup (B - A) = B - A$
가 성립하려면 $(A - B) \subset (B - A)$ 이어야 하는데 $A - B$ 와 $B - A$
는 서로소이므로 $A - B = \emptyset \therefore A \subset B$

22. 세 집합 $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x \mid x \leq a\}$, $C = \left\{x \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq b\right\}$ 에 대하여, A 는 C 이기 위한 필요조건이고, A 는 B 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최솟값을 M , b 의 최댓값을 n 라고 하면 $2M - n^2$ 의 값은?

- ① -24 ② -12 ③ 0 ④ 12 ⑤ 24

해설

- i) $C \subset A$ 조건에 만족하려면 $b \leq 6$
 $\therefore b$ 의 최댓값, $n = 6$
 ii) $A \subset B$ 조건에 만족하려면 $a \geq 6$
 $\therefore a$ 의 최솟값, $M = 6 \Rightarrow 2M - n^2 = -24$

23. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

$\textcircled{\tiny \neg} \quad x + 1 > 0$	$\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad x^2 + xy + y^2 \geq 0$
$\textcircled{\tiny \sqcup} \quad x + y \geq x - y $	$\textcircled{\tiny \supset} \quad x + y \geq x - y $

- ① $\textcircled{\tiny \neg}$

② $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqcup}$

③ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \supset}$
- ④ $\textcircled{\tiny \sqsubset}, \textcircled{\tiny \supset}$

⑤ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqsubset}, \textcircled{\tiny \sqcup}$

해설

$\textcircled{\tiny \neg} \quad x > -1$ 일 때만 성립한다.
 $\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$
(단, 등호는 $x = y = 0$ 일 때 성립)
 $\textcircled{\tiny \sqcup} \quad (|x| + |y|)^2 - |x - y|^2$
 $\quad = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2$
 $\quad = 2(|xy| + xy) \geq 0$
 $\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2$
(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)
 $\textcircled{\tiny \supset} \quad$ (반례) $x = 2, y = -3$ 일 때
 $|2 + (-3)| = 1, |2 - (-3)| = 5$ 이므로
 $|x + y| < |x - y|$
따라서 절대부등식이 아닌 것은 $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \supset}$ 이다.

24. $x > 2$ 일 때, $x + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x > 2$ 에서 $x - 2 > 0$ 이므로
산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x-2} &= x - 2 + \frac{1}{x-2} + 2 \\&\geq 2\sqrt{(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 2 \\&= 2 + 2 = 4\end{aligned}$$

(단, 등호는 $x = 3$ 일 때 성립)

25. 좌표평면 위의 점 A(1, 2)를 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, $\triangle OBC$ 의 최소 넓이는?

- ① 3 ② 3.5 ③ 4 ④ 4.5 ⑤ 5

해설

B(a , 0), C(0, b)이므로
 $\triangle OBC$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 은 점 (1, 2)를 지나므로

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}} = 2\sqrt{\frac{1}{S}}$$

$\therefore S \geq 4$

26. 임의의 정수 k 에 대하여 $f(k) = 2k - 1$ 이라 하고, 연산 $\diamond$ 를 $f(m)\diamond f(n) = f(2m + n)$ 로 정의한다. 이 때, $-3\diamond 5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

해설

$f(m) = -3, f(n) = 5$ 라 하면

$2m - 1 = -3, 2n - 1 = 5$

$\therefore m = -1, n = 3$

$\therefore -3\diamond 5 = f(-1)\diamond f(3) = f(-2 + 3) = f(1) = 1$

27. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1) = 3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \text{ 를 만족시킨다. 이 때, } f(1998) \text{ 의 값은?}$$

- ① 3 ② 2 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1+f(1)}{1-f(1)} \\ &= \frac{1+3}{1-3} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1+f(2)}{1-f(2)} \\ &= \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{1+f(3)}{1-f(3)} \\ &= \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5) &= \frac{1+f(4)}{1-f(4)} \\ &= \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

$$f(5) = f(1) = 3 \text{ 이므로}$$

$$f(6) = f(2) = -2, f(7) = f(3) = -\frac{1}{3}$$

$$f(8) = f(4) = \frac{1}{2}, f(9) = f(5) = f(1) = 3, \dots$$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수) 은

3, -2, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$$\therefore f(4n+k) = f(k)$$

(단, n 은 0 이상의 정수, $k = 0, 1, 2, 3$)

$$\text{그러므로 } f(1998) = f(4 \times 499 + 2) = f(2) = -2$$

28. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은

 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$

{3, 4}로 6 개이다.

정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인 함수의 개수는

 $2^3 = 8$ 인데

이 중에서 지역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2=6$

따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

29. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g 가 $f(x) = ax + b, g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

- ① 60
- ② 55
- ③ 51
- ④ 48
- ⑤ 45

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b \\ &= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots \cdots \textcircled{1} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1 \\ &= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \text{모든 실수 } x \text{ 에 대하여 } \textcircled{1} &= \textcircled{2} \text{ 이므로} \\ 2a &= 2a^2, \quad 3a = 4ab + 3a, \quad a + b = 2b^2 + 3b + 1 \\ \text{위의 식을 연립하여 풀면 } a &= 1, \quad b = 0 (\because a \neq 0) \\ \text{즉, } f(x) &= x \text{ 이므로} \\ f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55\end{aligned}$$

30. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가 $f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = 6x-5$ 일 때,
 $f(2x+1)$ 을 구하면?

① $x-1$

② $2x-2$

③ $4x-2$

④ $6x-3$

⑤ $8x-3$

해설

$$\frac{3x+1}{2} = t \text{ 라 하면 } 2t = 3x+1$$

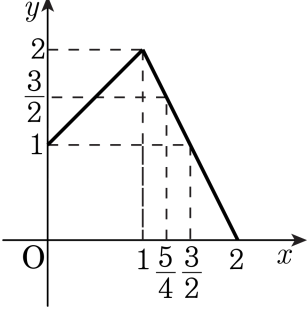
$$\therefore x = \frac{2t-1}{3}$$

$$f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = 6x-5 \text{ 에서}$$

$$f(t) = 6 \cdot \frac{2t-1}{3} - 5 = 4t-7$$

$$\therefore f(2x+1) = 4(2x+1) - 7 = 8x-3$$

31. $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,
 $f^{2008}\left(\frac{5}{4}\right)$ 의 값은?(단, $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) =$
 $f(f^2(x)) \cdots f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, n 은 자연수)



- ① 0
- ② 1
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ $\frac{5}{4}$
- ⑤ 2

해설

함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right) = 1, f(1) = 2$$

$f(2) = 0, f(0) = 1$ 이므로

$$f^2\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

$$f^3\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^2\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(1) = 2$$

$$f^4\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^3\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(2) = 0$$

$$f^5\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^4\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(0) = 1$$

$$f^6\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^5\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(1) = 2 \cdots$$

따라서, $f^n\left(\frac{5}{4}\right)$ 은

$\frac{3}{2}, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \cdots$ 와 같이 $n \geq 2$ 일 때, 1, 2, 0 의 값이
반복되므로

$$\therefore f^{2008}\left(\frac{5}{4}\right) = f^{3 \times 668 + 4}\left(\frac{5}{4}\right) = f^4\left(\frac{5}{4}\right) = 0$$

32. $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $b \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수는

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와

직선 $y = ax+b$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = |x-1|$ 에서

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = ||x-1|-1|$

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히

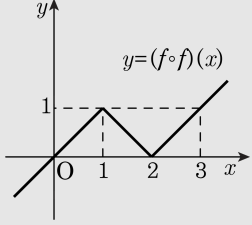
많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는

$y = -x+2$ 이어야 한다.

그런데, $b \neq 0$ 이므로 $y = -x+2$

따라서 $a = -1, b = 2$ 이므로 $ab =$

-2



33. 양의 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & (x \geq 1) \\ \frac{1}{x} + 1 & (0 < x < 1) \end{cases} \quad \text{일 때, } (f \circ f \circ f)(a) = 5 \text{ 를 만족하는}$$

상수 a 의 값을 구하면?

- ① -3 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$(f \circ f \circ f)(a) = 5$ 에서 $f(f(f(a))) = 5$ 이므로

$f(f(a)) = f^{-1}(5) = k_1$ 이라 하면 $f(k_1) = 5$

$5 > 1$ 이므로 $0 < k_1 < 1$, $\frac{1}{k_1} + 1 = 5$

$$\therefore k_1 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(f(a)) = \frac{1}{4}$$

$$f(a) = f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = k_2 \text{라 하면 } f(k_2) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} < 1 \text{ 이므로 } k_2 \geq 1, \frac{1}{k_2+1} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore k_2 = 3$$

$f(a) = 3$ 에서 $3 \geq 1$ 이므로 $0 < a < 1$

$$\therefore \frac{1}{a} + 1 = 3, a = \frac{1}{2}$$

34. 함수 $y = |x - 2| + |x + 1|$ 이 $x = m$ 일 때, 최솟값을 갖는다. 이를 만족시키는 정수 m 의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$y = |x - 2| + |x + 1|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때,

$$y = -(x - 2) - (x + 1) = -2x + 1$$

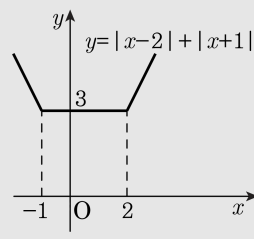
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,

$$y = -(x - 2) + (x + 1)$$

iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$y = (x - 2) + (x + 1) = 2x - 1 = 3$$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로 y 의 최솟값은 3 이고 이때, 정수 m 은 $-1, 0, 1, 2$ 의 4 개다.



35. $A = \{-1, 0, 1\}$ 일 때, 집합 A 에서 집합 A 로의 함수 f 가 있다.
 $f(-x) = f(x)$ 인 함수 f 의 개수는?

① 3

② 6

③ 9

④ 12

⑤ 15

해설

$$3 \times 3 = 9$$