1. $P = a^3 + 4a^2b + 2ab^2$, $Q = -2a^2b + 3ab^2 - b^3$ 일 때, $3P - 2Q$를 계산하면?

① $3a^3 + 12a^2b + 2b^3$
② $3a^3 - 12a^2b + 2b^3$
③ $3a^3 + 16a^2b + 2b^3$
④ $3a^3 + 8a^2b + 2b^3$
⑤ $3a^3 - 8a^2b + 2b^3$

해설

$3(a^3 + 4a^2b + 2ab^2) - 2(-2a^2b + 3ab^2 - b^3)$
$= 3a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + 4a^2b - 6ab^2 + 2b^3$
$= 3a^3 + 16a^2b + 2b^3$

2. 등식 $a(x+1)^2+b(x+1)+cx^2=3x-1$가 모든 x의 값에 대하여 항상 성립할 때 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $\frac{a}{c}+b$의 값을 구하면?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -2 ⑤ -1

해설

좌변을 전개해서 계수비교하면

$(a+c)\,x^2+(2a+b)\,x+a+b=3x-1$

$\therefore a+c=0,\ 2a+b=3,\ a+b=-1$

$\therefore a=4,\ b=-5,\ c=-4$

$\therefore \frac{a}{c}+b=-6$

3. 등식 $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)(x+yi)=8-2i$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)(x+yi)=8-2i$ 에서 $4x+4yi=8-2i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$4x=8$, $4y=-2$
$\therefore\ x=2,\ y=-\dfrac{1}{2}$
$\therefore\ xy=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

4. $\sqrt{-3}\times\sqrt{-6}-\sqrt{8}\div\sqrt{-4}$ 을 $a+bi$ (a, b 는 실수) 형태로 나타내면?

① $2\sqrt{2}+3i$ ② $-3\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ ③ $-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}i$

④ $2\sqrt{3}i$ ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{-3}\times\sqrt{-6}-\sqrt{8}\div\sqrt{-4}$

$=\sqrt{3}i\times\sqrt{6}i-\dfrac{2\sqrt{2}}{2i}$

$=-3\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

5. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a \geq 0,\ b < 0$　② $a > 0,\ b > 0$　③ $a \geq 0,\ b > 0$

④ $a < 0,\ b < 0$　⑤ $a \leq 0,\ b < 0$

해설

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 가 성립할 조건은 $b < 0$ 이고 $a \geq 0$ 일 때이다.

6. 이차방정식 $2x^2-4x-3=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 7　② 6　③ 5　④ 4　⑤ 3

해설

근과 계수와의 관계로부터

$\alpha+\beta=2 \quad \alpha\beta=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore \ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=7$

7. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot 3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

8. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1+i$ 이므로

두 근의 합 : $(1+i)+(1-i)=-a \quad \therefore\ a=-2$

두 근의 곱 : $(1+i)(1-i)=b \quad \therefore\ b=2$

$\therefore\ a+b=-2+2=0$

9. 세 모서리의 길이의 합이 22이고 대각선의 길이가 14인 직육면체의 겉넓이는?

① 144 ② 196 ③ 288 ④ 308 ⑤ 496

해설

세 모서리를 x, y, z라 하면

$x+y+z=22 \cdots\cdots$ ①

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=14 \cdots\cdots$ ②이고

겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이다.

①, ② 에서 $22^2=14^2+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=288$

10. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

① $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2$
$+(ab+bc+ca)x-abc$

② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

③ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2$
$+(ab+bc+ca)x+abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 대각선의 길이가 28 이므로
가로를 a, 세로를 b, 높이를 c 라고 했을 때
$(a^2+b^2)+c^2=28^2$
모든 모서리의 길이의 합이 176이므로
$a+b+c=44$
따라서 ③번과 같은 식을 사용하여 겉넓이를 구할 수 있다.

11. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 -5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 1이라고 한다. 이 때, 상수 m, n에 대하여 $m+n$은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x)=x^3+mx^2+nx+1$이 라 하면,

$f(x)=(x+1)Q_1(x)-5$

$f(x)=(x-2)Q_2(x)+1$

$\therefore\ f(-1)=-1+m-n+1=-5$

$f(2)=8+4m+2n+1=1$

$m=-3,\quad n=2$

따라서 $m+n=-1$이다.

12. 다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 1, 2이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$일 때, $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는?

① $Q(3)+3$ ② $Q(3)+4$ ③ $2Q(3)+3$

④ $2Q(3)+4$ ⑤ $Q(3)$

해설

주어진 조건에서 $f(1)=1$, $f(2)=2$이다.

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$라 놓으면

$f(1)=a+b=1$, $f(2)=2a+b=2$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

즉 $f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+x$

$\therefore\ f(3)=2Q(3)+3$

13. 사차식 $x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x-3y$ ② $x-2y$ ③ $x-y$

④ $x+y$ ⑤ $x+3y$

해설

$$x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4 = \left(x^2 - 9y^2\right)\left(x^2 - y^2\right)$$
$$= (x-3y)(x+3y)(x-y)(x+y)$$

14. 서로 다른 세 실수 x, y, z에 대하여 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 를 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$(x+y+z)=0$ 또는 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\therefore\ x+y+z=0$ 또는 $\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

그런데 x, y, z 가 서로 다른 세 실수$(x\neq y\neq z)$ 이므로

$x+y+z=0$

15. $[a,\ b,\ c] = a(b^2 - c^2)$일 때, $[a,\ b,\ c] + [b,\ c,\ a] + [c,\ a,\ b]$의 인수인 것은?

① $a - b$　　② $b + c$　　③ $c + a$

④ $a + b + c$　　⑤ abc

해설

$$[a,\ b,\ c] + [b,\ c,\ a] + [c,\ a,\ b]$$
$$= a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$$
$$= ab^2 - ac^2 + bc^2 - ba^2 + ca^2 - cb^2$$
$$= a^2(c - b) - a(c^2 - b^2) + bc(c - b)$$
$$= (c - b)\{a^2 - a(c + b) + bc\}$$
$$= (c - b)(a - b)(a - c)$$

16. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3+2x^2-x-2이다. 두 다항식을 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, $f(3)+g(3)$의 값은?

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

해설

먼저 x^3+2x^2-x-2를 조립제법을 이용하여 인수분해 한다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\
 & & 1 & 3 & 2 \\
\hline
-2 & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \\
 & & -2 & -2 & \\
\hline
 & 1 & 1 & \boxed{0} & \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

$\Rightarrow x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+2)(x+1)$

최대공약수가 $(x-1)$이므로

$f(x)=(x-1)(x+2), g(x)=(x-1)(x+1)\cdots$ ㉠

또는 $f(x)=(x-1)(x+1), g(x)=(x-1)(x+2)\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 두 경우 모두 $f(3)+g(3)=18$

17. x가 실수일 때, 복소수$(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, x의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

(준식)$=(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$

i가 순허수이어야 제곱하면 음이 된다.

$\therefore\ x^2+4x+3=0$이고 $x^2+2x-3\neq 0$

$x=-1$ 또는 $x=-3\cdots$ ㉠

$x\neq 1$ 그리고 $x\neq -3\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x=-1$이다.

18. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 몫이 $A(x)$, 나머지가 a이고, $x+2$로 나누면 몫이 $B(x)$, 나머지가 b라고 한다. 이때, $A(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지를 a, b로 나타내면?

① $a-b$ ② $\frac{a-b}{2}$ ③ $\frac{a-b}{3}$ ④ $\frac{a-b}{4}$ ⑤ $\frac{a-b}{5}$

해설

$f(x) = (x-1)A(x) + a \cdots$ ①

$f(x) = (x+2)B(x) + b \cdots$ ②

①, ②에 각각 $x = 1, x = -2$를 대입하면

$f(1) = a, f(-2) = b$

$A(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해 $A(-2)$이다.

①에 $x = -2$를 대입하면

$f(-2) = -3A(-2) + a = b$

$$\therefore A(-2) = \frac{a-b}{3}$$

19. $\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{5}} = k \times 10^{n}$ (단, $0 < k < 10$, n은 자연수)로 나타낼 때, n의 값을 구하면?

① 72 ② 71 ③ 70 ④ 69 ⑤ 68

해설

$\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{5}} = N$ 이라고 하면

$\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{15}} < N < \dfrac{10^{85}}{10^{15}}$

$\dfrac{10 \times 10^{84}}{2 \times 10^{15}} < N < \dfrac{10 \times 10^{84}}{10^{15}}$

$5 \times 10^{69} < N < 10 \times 10^{69}$

따라서 $N = k \times 10^{69} (5 < k < 10)$

$\therefore\ n = 69$

20. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$에 대하여 $\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

④ $a=b$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

$\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

(좌변)

$=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$=(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2$

$=a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

따라서, $2a^2+2b^2-2c^2=0$이므로 $a^2+b^2=c^2$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.