

1. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.
- ㉡ $k = 1$ 이면 중근을 갖는다.
- ㉢ 두 근의 곱은 실수이다.
- ㉣ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

- ① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉣

③ ㉠, ㉡, ㉣
- ④ ㉡, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$
㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>
㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 중근을 갖는다.<참>
㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>
㉣ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1+k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1+k} = ai(a \neq 1)$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.

2. 이차방정식 $x^2 + 2|x| - 8 = 0$ 의 해는 ?

① $-2, 4$

② $-2, 2$

③ $-4, 4$

④ $-4, 2$

⑤ $-4, -2, 2, 4$

해설

$x^2 + 2|x| - 8 = 0$ 에서

i) $x > 0$ 일 때,

$x^2 + 2x - 8 = 0, (x + 4)(x - 2) = 0$

$\therefore x = -4$ 또는 $x = 2$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 2$

ii) $x < 0$ 일 때,

$x^2 + 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$

$\therefore x = 4$ 또는 $x = -2$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -2$

i), ii)에서 구하는 해는 $-2, 2$

3. x 에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $-1+\sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

▷ 정답 : $b=-1$

해설

$x^2+ax+b=0$ 에 $x=-1+\sqrt{2}$ 를 대입하여 정리하면
 $3-2\sqrt{2}+a(-1+\sqrt{2})+b=0$
 $-a+b+3+(a-2)\sqrt{2}=0$
 $-a+b+3=0$ 과 $a-2=0$ 에서 $a=2, b=-1$

4. 양의 실수 a, b 에 대하여 x 에 대한 이차방정식 $ax^2 + 2(b+i)x + 1 + 2i = 0$ 의 두 근이 서로 같을 때, $a + b$ 의 값은?

① $1 + \sqrt{5}$

② $1 - \sqrt{5}$

③ $2 + \sqrt{3}$

④ $2 - \sqrt{3}$

⑤ $1 + \sqrt{3}$

해설

복소계수 이차방정식에서도 중근을 가질 조건은 $D = 0$ 이다.

$ax^2 + 2(b+i)x + 1 + 2i = 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = (b+i)^2 - a(1+2i) = 0$$

위의 식을 정리하면

$$(b^2 - 1 - a) + (2b - 2a)i = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

a, b 가 실수이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$b^2 - 1 - a = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$2b - 2a = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 에서 $a = b$

$a = b$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$b^2 - 1 - b = 0, \quad b^2 - b - 1 = 0$$

$$\therefore b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

그런데 a, b 가 양의 실수이므로

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore a + b = 1 + \sqrt{5}$$

5. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$
항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D = 0$
 $D = (2m + a + b)^2 - 4(m^2 + ab) = 0$
 $4m^2 + a^2 + b^2 + 4ma + 2ab + 4mb - 4m^2 - 4ab = 0$
 m 에 관해 식을 정리하면
 $(4a + 4b)m + (a^2 - 2ab + b^2) = 0$
 $4a + 4b = 0, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 0$
 $\therefore a + b = 0$

6. x 에 관한 이차식 $a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)$ 에서 a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, 이 이차식이 x 에 관한 완전제곱식이 되는 것은 이 삼각형이 어떠한 삼각형일 때인가?

- ① a 를 빗변으로 하는 직각삼각형
② c 를 빗변으로 하는 직각삼각형
③ $a=b$ 인 이등변삼각형
④ $b=c$ 인 이등변삼각형
⑤ 정삼각형

해설

준식을 정리하면,
 $(a-c)x^2+2bx+a+c$
위의 식이 완전제곱식이 되려면
 $D=0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4}=b^2-(a-c)(a+c)=0,$
즉 $b^2-a^2+c^2=0$
 $\therefore a^2=b^2+c^2$
따라서, a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

7. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta = 6$ 이 성립한다.
이 때, 방정식 $f(5x - 7) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - \alpha)(x - \beta) = 0 (a \neq 0) \text{에서} \\ f(5x - 7) &= a(5x - 7 - \alpha)(5x - 7 - \beta) = 0 \\ \therefore 5x &= 7 + \alpha, 7 + \beta \\ \therefore x &= \frac{7 + \alpha}{5}, \frac{7 + \beta}{5} \\ \text{따라서, 구하는 두 근의 합은} \\ \frac{14 + \alpha + \beta}{5} &= \frac{20}{5} = 4 \end{aligned}$$

8. $x^2 - (k-1)x + 3 = 0$ 의 두 근의 차가 2가 되도록 하는 양의 실수 k 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

두 근을 각각 α 와 β 라 하면

$$\alpha + \beta = k - 1$$

$$\alpha\beta = 3$$

$$|\alpha - \beta| = 2 \text{ 이므로}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (k - 1)^2 - 12 = 4$$

$$k = 5 \text{ 또는 } -3$$

k 는 양의 실수이므로 $k = 5$

9. 이차방정식 $-x^2 + 4x + a = 0$ 의 두 근이 모두 양수이기 위한 a 의 최대정수를 m , 이차방정식 $x^2 + 2(x+1) + k^2 - 9 = 0$ 의 두 근이 서로 다른 부호이기 위한 k 의 최소 정수를 n 이라 할 때, $m+n$ 의 값은?

- ① -8
- ② -7
- ③ -3
- ④ -1
- ⑤ 3

해설

(i) $-x^2 + 4x + a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 $\alpha + \beta = 4$
 $\alpha\beta = -a > 0$ 에서 $a < 0$
 $\frac{D}{4} = 4 + a \geq 0$ 에서 $a \geq -4$
 $\therefore -4 \leq a < 0$
최대정수 $m = -1$
(ii) $x^2 + 2x + k^2 - 7 = 0$
두 근의 곱 $k^2 - 7 < 0$
 $\therefore -\sqrt{7} < k < \sqrt{7}$
최소의 정수 $n = -2$
 $\therefore m + n = -3$

10. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{AB} = 2$ 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

A(α , 0), B(β , 0) ($\alpha < \beta$) 이라 하면

α, β 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = 2a \quad \cdots \textcircled{1}$$

이 때, $\overline{AB} = 2$ 이므로

$$\beta - \alpha = 2 \text{ 양변을 제곱하면}$$

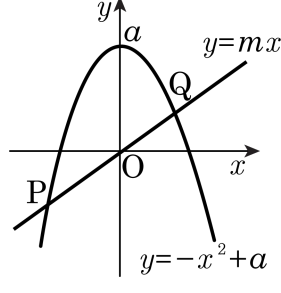
$$(\beta - \alpha)^2 = 4$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하여 정리하면 } a^2 - 8a - 4 = 0$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

11. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = -x^2 + a$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$ 일 때, $a + m$ 의 값을 구하여라. (단, a, m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = -x^2 + a$ 와 $y = mx$ 가 만나는 두 점 P, Q의 x 좌표는 방정식이 $-x^2 + a = mx$ 의 근이다.

점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$ 이므로

방정식 $x^2 + mx - a = 0$ 의 한 근이 $\sqrt{5} - 1$ 이다.

그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5} - 1$ 이다.

따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-m = (\sqrt{5} - 1) + (-\sqrt{5} - 1) = -2$$

$$-a = (\sqrt{5} - 1)(-\sqrt{5} - 1) = -4$$

$$\therefore a = 4, m = 2 \quad \therefore a + m = 6$$

12. $2x + y = 3$ 일 때, $x^2 + xy + 1$ 의 최댓값을 구하면?

- ① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

해설

$2x + y = 3$ 에서 $y = -2x + 3$ 이다.

$$x^2 + xy + 1 = x^2 + x(-2x + 3) + 1$$

$$= -x^2 + 3x + 1$$

$$= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$$

따라서 최댓값은 $\frac{13}{4}$ 이다.

13. x 의 값의 범위가 $2 \leq x \leq 4$ 인 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$y = -2x^2 + 4x + 1 = -2(x - 1)^2 + 3$ 이므로
 $2 \leq x \leq 4$ 에서 $x = 2$ 일 때 최댓값 1,
 $x = 4$ 일 때 최솟값 -15 를 가진다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $1 + (-15) = -14$

14. 가로 길이가 5cm, 세로 길이가 9cm 인 직사각형의 가로 길이를 x cm 만큼 늘이고, 세로 길이를 x cm 만큼 줄여서 새로운 직사각형을 만들었다. 새로운 직사각형의 넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 2.5 ④ 3 ⑤ 3.5

해설

새로운 사각형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= (5+x)(9-x) \\ &= -x^2 + 4x + 45 \\ &= -(x-2)^2 + 49 \end{aligned}$$

따라서 $x=2$ 일 때 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값 49cm^2 를 가진다.

15. 지면으로부터 초속 20m 로 위로 던진 공의 x 초 후의 높이를 y m 라고 하면 $y = -5x^2 + 20x$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답 : m

▷ 정답 : 20 m

해설

$y = -5x^2 + 20x$ 에서 $y = -5(x-2)^2 + 20$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 20m 이다.

16. 방정식 $|x+1| + \sqrt{(x-2)^2} = x+3$ 의 근을 α, β 라 할 때 $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① 0

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

i) $x < -1$ 일 때,
 $-(x+1) - (x-2) = x+3$
 $\therefore x = -\frac{2}{3}$ ($x < -1$ 에 부적합)
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,
 $x+1 - (x-2) = x+3$
 $\therefore x = 0$
iii) $x \geq 2$ 일 때,
 $x+1 + x-2 = x+3$
 $\therefore x = 4$
(i), (ii), (iii)에 의해 $x = 0, 4$
 $\therefore \alpha + \beta = 4$

17. 방정식 $\{1 + (a + b)^2\}x^2 - 2(1 - a - b)x + 2 = 0$ 의 근이 실수일 때 $a^3 + b^3 - 3ab$ 의 값을 구하면 ? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\frac{D}{4} = (1 - a - b)^2 - \{1 + (a + b)^2\} \cdot 2 \geq 0$$

$$-(a + b)^2 - 2(a + b) - 1 \geq 0$$

양변에 -1 을 곱하면

$$(a + b)^2 + 2(a + b) + 1 \leq 0$$

$$\{ (a + b) + 1 \}^2 \leq 0$$

그런데 a, b 가 실수이므로 $a + b + 1 = 0$

$$\therefore a + b = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore a^3 + b^3 - 3ab &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) - 3ab \\ &= (-1)^3 - 3ab(-1) - 3ab \\ &= -1 \end{aligned}$$

18. 방정식 $3x^2+5x-2=0$ 의 두 근을 α, β 라 하고 방정식 $5x^2+4x+3=0$ 의 두 근을 γ, δ 라 할 때, $\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\delta\beta} + \frac{1}{\delta\alpha}$ 의 값은?

- ① $-\frac{10}{3}$ ② $-\frac{7}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -\frac{5}{3}, \quad \alpha\beta = -\frac{2}{3}, \quad \gamma + \delta = -\frac{4}{5}, \quad \gamma\delta = \frac{3}{5} \\ \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\delta\beta} + \frac{1}{\delta\alpha} \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} \right) \\ &= \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \right) \left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta} \right) \\ &= \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}} \times \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

19. α, β 를 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ (단, $ac \neq 0$)의 두 근이라 할 때,
다음 중 $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 을 두 근으로 가지는 이차방정식은?

- ① $a^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + c^2 = 0$
 ② $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x - c^2 = 0$
 ③ $c^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + a^2 = 0$
 ④ $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$
 ⑤ $c^2x^2 + (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

해설

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} \\ &= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

따라서, 구하는 이차방정식은

$$x^2 - \frac{(b^2 - 2ac)}{c^2}x + \frac{a^2}{c^2} = 0$$

$$\text{즉, } c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$$

20. 이차함수 $y = x^2 - x + 3$ 이 직선 $y = kx - 6$ 보다 항상 위쪽에 있도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < k < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = x^2 - x + 3 - (kx - 6) = x^2 - (1 + k)x + 9$ 에서 $D < 0$ 을 이용하여 $\alpha + \beta$ 를 구하면,
 $(1 + k)^2 - 36 < 0$
 $k^2 + 2k - 35 < 0, (k + 7)(k - 5) < 0 \therefore -7 < k < 5$
 $\therefore \alpha + \beta = -7 + 5 = -2$

21. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -4 를 가지며 점 $(1, 2)$ 를 지난다. 이 때, $a - b - c$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

꼭짓점이 $(3, -4)$ 이므로 $y = a(x-3)^2 - 4$

$(1, 2)$ 를 대입하면

$$2 = 4a - 4$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}(x-3)^2 - 4 = \frac{3}{2}x^2 - 9x + \frac{19}{2}$$

$$a = \frac{3}{2}, b = -9, c = \frac{19}{2}$$

$$\therefore a - b - c = \frac{3}{2} - (-9) - \frac{19}{2} = 1$$

22. 두 함수 $f(x) = |x - 2| - 5$, $g(x) = x^2 + 6x + 8$ 에 대하여 $0 \leq x \leq 5$ 에서 $y = g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M , m 라고 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = |x - 2| - 5 = t$ 로 놓으면
 $y = g(f(x)) = g(t) = t^2 + 6t + 8 = (t + 3)^2 - 1$
그런데 $0 \leq x \leq 5$ 에서 $-5 \leq t \leq -2$ 이므로
 y 의 값은 $t = -5$ 일 때 최대이고 최댓값은 3,
 $t = -3$ 일 때 최소이고 최솟값은 -1 이다.
 $\therefore M = 3, m = -1$
 $\therefore M + m = 2$

23. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (a-2)x + a^2 + a + 2 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a 는 상수)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

이차방정식 $x^2 + (a-2)x + a^2 + a + 2 = 0$ 이
두 실근을 가져야 하므로
 $D = (a-2)^2 - 4(a^2 + a + 2) = -3a^2 - 8a - 4 \geq 0$
 $(3a+2)(a+2) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq a \leq -\frac{2}{3} \cdots \text{㉠}$
근과 계수의 관계에서
 $\alpha + \beta = -a + 2, \alpha\beta = a^2 + a + 2$ 이므로
 $(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$
 $= a^2 + a + 2 + a - 2 + 1$
 $= a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$
따라서, $-2 \leq a \leq -\frac{2}{3}$ 에서
 $a = -1$ 일 때 최솟값 0,
 $a = -2$ 일 때 최댓값 1을 가지므로
최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

24. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$$

$$y^2 + y - 6 \leq 0, \quad (y + 3)(y - 2) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

25. 이차함수 $y = -2x^2 + 4mx + m - 1$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값은?

① $-\frac{7}{2}$

② -2

③ $-\frac{9}{8}$

④ 3

⑤ $\frac{10}{3}$

해설

$$y = -2x^2 + 4mx + m - 1 = -2(x - m)^2 + m - 1 + 2m^2$$

$$M = 2m^2 + m - 1 = 2\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

M 은 $m = -\frac{1}{4}$ 일 때 최솟값 $-\frac{9}{8}$ 를 갖는다.