1. 어떤 수를 3 배 하고 8 을 빼면 32 보다 작고, 어떤 수에서 5 를 빼고 6 배 하면 24 보다 크다고 한다. 어떤 수의 범위로 옳은 것은?

① $8 < x < \frac{37}{3}$ ② $8 < x < \frac{40}{3}$ ③ $9 < x < \frac{37}{3}$
④ $9 < x < \frac{40}{3}$ ⑤ $9 < x < \frac{43}{3}$

해설

어떤 수를 x 라고 하고 문제의 조건을 이용하여 두 개의 식을 만든다. '어떤 수를 3 배 하고 8 을 빼면 32 보다 작고.' 를 식으로 표현하면, $3x - 8 < 32$ 이고, '어떤 수에서 5 를 빼고 6 배 하면 24 보다 크다' 를 식으로 표현하면, $6(x - 5) > 24$ 이다.

두 개의 부등식을 연립부등식으로 표현하면, $\begin{cases} 3x - 8 < 32 \\ 6(x - 5) > 24 \end{cases}$

이다. 이를 간단히 하면, $\begin{cases} x < \frac{40}{3} \\ x > 9 \end{cases}$ 따라서 $9 < x < \frac{40}{3}$ 이다.

2. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2-6x+9>0 \\ x^2-3x-4\le 0 \end{cases}$ 의 해를 바르게 구한 것을 고르면?

① $-1 \le x < 4$　② $3 < x \le 4$

③ $-1 \le x < 3$　④ $-1 \le x < 3$ 또는 $3 < x \le 4$

⑤ 해가 없다

해설

$\begin{cases} (x-3)^2>0 & : x \ne 3\text{인 모든 실수} \\ (x-4)(x+1)\le 0 & : -1 \le x \le 4 \end{cases}$

$\therefore\ -1 \le x < 3$ 또는 $3 < x \le 4$

3. 두 점 A $(-1, 1)$, B $(1, 5)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표는?

① $(3, 0)$ ② $(5, 0)$ ③ $(0, 3)$ ④ $(0, 5)$ ⑤ $(0, 7)$

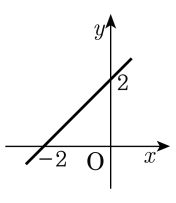
해설

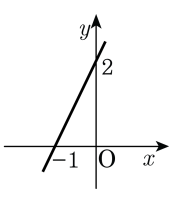
y 축 위의 점을 $(0, a)$라 하면

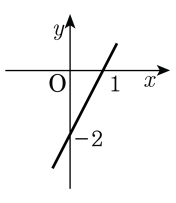
$\therefore 1^2 + (a-1)^2 = 1^2 + (a-5)^2$ 정리하면

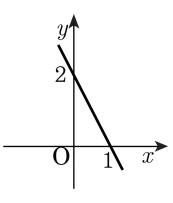
$a = 3$

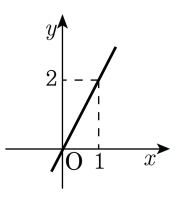
4. 다음 중 직선 $y = 2(x+1)$ 을 나타내는 그래프는?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$y = 2(x+1) = 2x + 2$ 이므로, 기울기가 2 이고,
y 절편이 2 인 그래프는 ②번이다.

5. 다음 <보기> 중 직선 $y = 2x + 1$과 서로 평행한 직선을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $y = -2x + 1$　　㉡ $y = 2(x + 3)$　　㉢ $\frac{1}{2}x + 1$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

서로 평행한 직선들은 기울기가 같으므로 직선 $y = 2x + 1$과 평행한 직선은 ㉡이다.

6. 직선 $y = 2x + 3$ 을 x 축 방향으로 1 , y 축의 방향으로 –2 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 9 ② 7 ③ 5 ④ 3 ⑤ 1

해설

$y = 2x + 3$

$\Rightarrow \quad y + 2 = 2(x - 1) + 3$

$\Rightarrow \quad y = 2x - 1$

$\therefore \quad a + b = 1$

7. 실수 a는 $0 < a < \frac{1}{2}$을 만족할 때, 다음 중 가장 큰 수를 구하시오.

① 0 ② 1 ③ $\frac{1}{a}$ ④ $\frac{1}{1-a}$ ⑤ $\frac{a}{1+a}$

해설

주어진 a 값의 범위를 이용하여 보기식의 값의 범위를 알아낸다.

③ $\frac{1}{\frac{1}{2}} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0}$, $2 < \frac{1}{a}$

④ $-\frac{1}{2} < -a < 0$, $\frac{1}{2} < 1-a < 1$

$1 < \frac{1}{1-a} < 2$

⑤(주어진 식)$=\frac{1+a-1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a}$ 에서

$1 < 1+a < \frac{3}{2}$

$\frac{2}{3} < \frac{1}{1+a} < 1$

$0 < 1 - \frac{1}{1+a} < \frac{1}{3}$

8. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \\ 2(3-2x) < -x+10 \end{cases}$ 을 만족하는 양의 정수 x 의 개수는?

① 1 개 ② 3 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

i) $3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \Rightarrow x \leq 3$

ii) $2(3-2x) < -x+10 \Rightarrow x > -\frac{4}{3}$

연립부등식의 해는 $-\frac{4}{3} < x \leq 3$ 이므로, 이를 만족하는 양의 정수 x 의 개수는 1, 2, 3 의 3 개이다.

9. 부등식 $-x^2 - kx + k < 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 k의 범위를 정하면 $a < k < \beta$이다. 이 때, $\alpha + \beta$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2 + kx - k > 0$이 모든 x에 대해서 성립하려면,
판별식이 0보다 작아야 한다
$D = k^2 + 4k < 0$에서
$k(k+4) < 0$, $-4 < k < 0$,
$\alpha = -4$, $\beta = 0$
$\therefore \quad \alpha + \beta = -4$

10. 세 점 A (1, 5), B (−4, −7), C (5, 2)가 좌표평면 위에 있다. △ABC에서 ∠A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, 점 D 의 좌표를 구하면?

① $(0, 0)$ ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$\overline{AB} = 13$, $\overline{AC} = 5$

따라서 $\overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$

D 는 B , C 를 13 : 5 로 내분한 점

$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

11. 직선 $5x+2y+1=0, 2x-y+4=0$의 교점을 지나고, 직선 $x+y+1=0$에 수직인 직선의 방정식은?

① $x+y+3=0$ ② $x-y+3=0$ ③ $x+y-3=0$

④ $x-y-3=0$ ⑤ $2x+y+3=0$

해설

두 직선 $5x+2y+1=0$, $2x-y+4=0$ 의
교점을 지나는 직선의 방정식은
$(5x+2y+1)+k(2x-y+4)=0$
$\therefore\ (5+2k)x+(2-k)y+(1+4k)=0\cdots$㉠
이 직선이 $x+y+1=0$ 에 수직이므로
$(-1)\times\dfrac{2k+5}{k-2}=-1$
$\therefore\ k=-7\cdots$㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 구하는
직선의 방정식은 $x-y+3=0$
(보충)
두 직선 $ax+by+c=0,\ \ a'x+b'y+c'=0$ 의
교점을 지나는 직선은
$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$

12. 이차방정식 $x^2+y^2+2ax-4ay+6a^2-a-6=0$ 이 원의 방정식이 될 때 다음 중 a 가 가질 수 없는 정수 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x+a)^2+(y-2a)^2=-(a^2-a-6)$
이것이 원을 나타내려면 $-(a^2-a-6)>0$
즉 $a^2-a-6<0$
$\therefore\ -2<a<3$

13. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

14. 원 $x^2+y^2=6$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하면?

① $y=2x\pm\sqrt{10}$ ② $y=2x\pm3\sqrt{2}$ ③ $y=2x\pm2\sqrt{5}$

④ $y=2x\pm2\sqrt{6}$ ⑤ $y=2x\pm\sqrt{30}$

해설

기울기가 2 인 직선의 방정식은
$y=2x+k$ 직선이 원에 접하므로 직선과 원의
중심 사이 거리는 반지름과 같다.

$\therefore \dfrac{|2\times0+(-1)\times0+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{6}$

$\Rightarrow |k|=\sqrt{30}$

$\Rightarrow k=\pm\sqrt{30}$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=2x\pm\sqrt{30}$

15. 점 P를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(3,\ -5)$라 할 때, 점 P의 좌표는?

① $(0,\ -3)$ ② $(-3,\ 0)$ ③ $(6,\ -7)$
④ $(-7,\ 6)$ ⑤ $(-6,\ 7)$

해설

$P(a,\ b)$를 조건에 의하여 이동하면 $(a+3,\ b-2)=(3,\ -5)$
따라서 $a=0,\ b=-3$

16. 다음 두 일차부등식을 동시에 만족하는 정수는 모두 몇 개인지 구하여라.

$$\frac{x-3}{2}+4 \geq \frac{x}{3}+\frac{3}{4}, \quad 0.1-0.5x > 1-0.2x$$

▶ 답: 개

▷ 정답: 7 개

해설

$\frac{x-3}{2}+4 \geq \frac{x}{3}+\frac{3}{4}$의 양변에 12를 곱하면

$6(x-3)+48 \geq 4x+9$,

$6x-18+48 \geq 4x+9$,

$2x \geq -21$

$\therefore x \geq -\frac{21}{2}$

$0.1-0.5x > 1-0.2x$의 양변에 10 을 곱하면

$1-5x > 10-2x$,

$-3x > 9$

$\therefore x < -3$

$\therefore -\frac{21}{2} \leq x < -3$

따라서 두 일차부등식을 만족하는 정수는

-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4이므로 모두 7개이다.

17. 부등식 $ax^2+5x+b>0$ 을 풀어서 $2<x<3$ 이라는 해가 구해졌다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

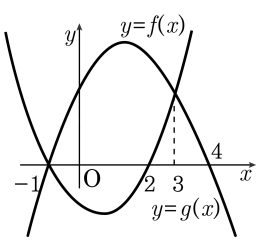
▶ 답:

▷ 정답: $ab=6$

해설

$ax^2+5x+b>0$ ·····㉠
해가 $2<x<3$ 이 되는 이차부등식은
$(x-2)(x-3)<0$ 전개하면
$x^2-5x+6<0$ ·····㉡
㉠과 일차항의 계수를 맞추기위해
양변에 -1 을 곱하면
$-x^2+5x-6>0$ ·····㉢
㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a=-1$, $b=-6$

18. 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) - g(x) \le 0$ 의 해를 구하면?



① $x \le -1$ ② $-1 \le x \le 2$

③ $-1 \le x \le 3$ ④ $2 \le x \le 3$

⑤ $2 \le x \le 4$

해설

$f(x) - g(x) \le 0$ 에서 $f(x) \le g(x)$ 이 부등식을 만족하는 x 의 값의 범위는 $y = f(x)$ 의 그래프가 $y = g(x)$ 의 그래프와 같거나 아래쪽에 있는 부분이므로 $-1 \le x \le 3$

19. 이차함수 $y = x^2 - 4ax + 1$ 의 그래프가 직선 $y = 2x - a$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있도록 하는 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a > 0$ ② $-\frac{1}{4} < a < 0$ ③ $-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$

④ $-\frac{3}{4} < a < \frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{4} < a < 0$

해설

$$\begin{cases} y = x^2 - 4ax + 1 \\ y = 2x - a \end{cases}$$

근이 존재하지 않아야 하므로

$2x - a = x^2 - 4ax + 1$

$x^2 + (-4a - 2)x + (a + 1) = 0$

$D < 0 : \ (2a + 1)^2 - (a + 1) < 0$

$4a^2 + 3a = a(4a + 3) < 0$

$\therefore \ -\frac{3}{4} < a < 0$

20. 부등식 $0 \le x \le 2$ 의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 의 영역에 포함되도록 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

부등식 $0 \le x \le 2$ 의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 의 영역에 포함되어야하므로

$0 \le x \le 2$ 에서

$x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이어야 한다.

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 라 하면

$0 \le x \le 2$ 에서

$f(x) \le 0$ 이어야 하므로

$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같아야 한다.

$f(0) = a^2 - 4 \le 0$ 에서

$-2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠

$f(2) = a^2 - 2a \le 0$ 에서

$0 \le a \le 2 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 의 공통 범위를 구하면 $0 \le a \le 2$

따라서, 최댓값은 $M = 2$, 최솟값은 $m = 0$ 이므로

$M - m = 2$

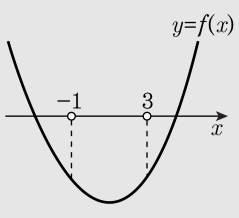
21. $-1 < x < 3$인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k < 0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0,\ f(3) \le 0$이어야 한다.

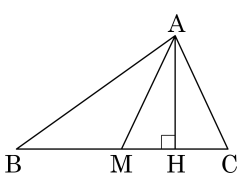


(ⅰ) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0,\ k+3 \le 0$
$\therefore k \le -3$

(ⅱ) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0,\ 9k+3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

22. 다음은 예각삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$이 성립함을 보인 것이다.



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라하자.
직각삼각형 ABH에서
$\overline{AB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2$
$= \boxed{\text{(가)}}^2 + \overline{AH}^2$
$= \overline{BM}^2 + 2\overline{BM} \cdot \overline{MH} + \boxed{\text{(나)}}^2 \cdots$㉠
직각삼각형 AHC 에서
$\overline{AC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2$
$= \boxed{\text{(다)}}^2 + \overline{AH}^2$
$= \overline{CM}^2 - 2\overline{CM} \cdot \overline{MH} + \boxed{\text{(라)}}^2 \cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$이다.

(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

② (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

③ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

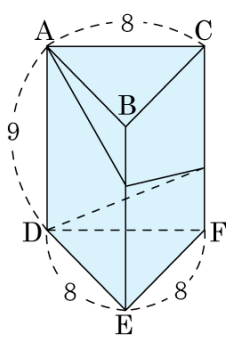
④ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

⑤ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

해설

생략

23. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: $3\sqrt{73}$

해설

$\overline{AD'} = \sqrt{24^2 + 9^2} = \sqrt{576 + 81} = \sqrt{657} = 3\sqrt{73}$

24. 세 점 $(0,2)$, $(3,-3)$, $(-3,a)$가 한 직선 위에 있도록 하는 a의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: $a=7$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\Rightarrow \dfrac{-3-2}{3-0}=\dfrac{a-(-3)}{-3-3}$

$\Rightarrow a=7$

25. 직선 $(k-2)x+(2k-3)y+4k-3=0$은 실수 k의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지날 때, 그 점의 좌표를 구하면?

① $(6,-5)$ ② $(5,-6)$ ③ $(4,-3)$
④ $(5,-4)$ ⑤ $(-3,6)$

해설

$(k-2)x+(2k-3)y+4k-3=0$
$\Rightarrow \quad (x+2y+4)k-(2x+3y+3)=0$
k에 관계없이 일정한 점을 지나려면
$x+2y+4=0, \quad 2x+3y+3=0$
연립하면 $x=6, \ y=-5$
$\therefore$ 일정한 점은 $(6,-5)$

26. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

$3x-y-6=0$, $\quad 3x-y+k=0$

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=4$

해설

직선 $3x-y-6=0$ 위의 한 점 $(2,0)$ 에서 직선 $3x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$$\frac{|3\times 2-0+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|6+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

$|6+k|=10$

따라서 $k=4$ ($\because$ k 는 양수)

27. 두 원 $x^2+y^2=4$ 와 $3x^2+3y^2-4x+8y=0$ 의 교점을 지나면서 중심이 $y=-x-1$ 위에 있는 원의 반지름의 길이를 구하면?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

두 원의 교점을 지나는 원을 구하는 공식에 따라 두 원 $x^2+y^2=4$ 와 $3x^2+3y^2-4x+8y=0$ 의 교점을 지나는 원의 방정식이
$3k(x^2+y^2-4)+3x^2+3y^2-4x+8y=0$
$x^2+y^2-\left(\frac{4}{3k+3}x\right)+\frac{8}{3k+3}y-\frac{4k}{k+1}=0$ 임을 알 수 있다.
이 원의 중점은 $\left(\frac{2}{3k+3}, -\frac{4}{3k+3}\right)$ 이다.
원의 중점이 $y=-x-1$ 을 지난다고 했으므로 중점을 대입했을 때
$k=-\frac{1}{3}$ 이다.
그리고 중점은 $(1,-2)$ 이고 $r^2=3$ 이다.
$(x-1)^2+(y+2)^2=3$ 의 값에서 원의 반지름이 $\sqrt{3}$ 임을 알 수 있다.

28. 직선 $y = 2x + 4$ 를 x 축을 따라 α 만큼 평행이동시킨 직선을 l, l 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 m, m 을 y 축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 n 이라고 할 때, 직선 l 이 n 과 일치하도록 상수 α 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

직선 $y = 2x + 4$ 를 x 축 방향으로 α 만큼
평행이동시킨 직선 l 은
l : $y = 2(x - \alpha) + 4$
이것을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 직선 m 은
m : $(-y) = 2(x - \alpha) + 4$
n 은 m 을 y 축에 대하여 대칭이동시킨 것이므로
n : $(-y) = 2(-x - \alpha) + 4$
이것을 정리하면 $y = 2x + 2\alpha - 4$ 이므로
l 과 n 이 일치하려면
$-2\alpha + 4 = 2\alpha - 4$ 가 되어 $\alpha = 2$ 이다.

29. 직선 $5x+12y+k=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 있다. 이 직선에서 점 $(1,\ 1)$ 까지의 거리가 2 일 때, 상수 k 의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -34

해설

직선 $5x+12y+k=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여
대칭이동한 직선의 방정식은 $5y+12x+k=0$
즉, $12x+5y+k=0$
이 직선과 점 $(1,1)$ 사이의 거리가 2 이므로
$\frac{|12\cdot 1+5\cdot 1+k|}{\sqrt{12^2+5^2}}=2$
$\frac{|17+k|}{13}=2$
$|k+17|=26$
$k+17=\pm 26$
$\therefore k=9$ 또는 $k=-43$
따라서, 구하는 상수 k 의 모든 값의 합은
$9+(-43)=-34$

30. 직선 $2x+ay+b=0$ 에 대하여 점 $\mathrm{A}(3,2)$ 와 대칭인 점을 $\mathrm{B}(-1,0)$ 이라고 할 때, 상수 a,b 에 대하여 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

두 점 $\mathrm{A}(3,2)$, $\mathrm{B}(-1,0)$ 에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점 $(1,1)$ 이
직선 $2x+ay+b=0$ 위에 있으므로
$2+a+b=0 \cdots$ ㉠
직선 AB 와 직선 $2x+ay+b=0$,
즉 $y=-\frac{2}{a}x-\frac{b}{a}$ 가 수직이므로
$\frac{2-0}{3-(-1)}=\frac{a}{2}$
$\therefore a=1$
이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-3$
$\therefore ab=-3$