1. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

x^3+ax^2+bx+3

$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$

$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$

$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

2. $(4x^2-3x+1)^5(x^3-2x^2-1)^4$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 512

해설

$(4x^2-3x+1)^5(x^3-2x^2-1)^4 = ax^{22}+bx^{21}+\cdots+c$
위의 식에 $x=1$ 을 대입하면, 모든 계수들의 총합이 나온다.
$\therefore$ (계수의 총합) $= 2^5\times(-2)^4 = 512$

3. x에 대한 다항식 $x^3 + 2x^2 - ax + b$가 $x^2 + x - 2$로 나누어 떨어질 때, $a^2 + b^2$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + b = (x^2 + x - 2)Q(x)$
$\quad = (x+2)(x-1)Q(x)$
인수정리에 의해 $x = -2, x = 1$을 대입하면 우변이 0 이 된다.
$\therefore f(-2) = -8 + 8 + 2a + b = 0$
$f(1) = 1 + 2 - a + b = 0$ 연립하면, $a = 1, b = -2$
$\therefore\ a^2 + b^2 = 5$

4. $\dfrac{(2x-1)(2y-1)}{(2x-1)^2+(2y-1)^2}=-\dfrac{1}{2}$ 일 때, $x+y$ 의 값은?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$2x-1=u,\ 2y-1=v$ 라 놓으면

$\dfrac{uv}{u^2+v^2}=-\dfrac{1}{2}$ 에서

$u^2+v^2=-2uv,\ (u+v)^2=0$

$\therefore\ u+v=0$

$(2x-1)+(2y-1)=0,\ x+y=1$

5. $16x^4 - 625y^4$ 을 옳게 인수분해한 것은?

① $(x+5y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

② $(2x+y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

③ $(2x+5y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

④ $(x+5y)(x-5y)(4x^2+25y^2)$

⑤ $(2x+5y)(x-y)(4x^2+25y^2)$

해설

(준식) $= (4x^2)^2 - (25y^2)^2$
$= (4x^2+25y^2)(4x^2-25y^2)$
$= (2x+5y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

6. $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$　② $-(a+b+c)(a-b-c)$
③ $-(a+b)(b+c)(c+a)$　④ $(a+b)(b+c)(c+a)$
⑤ $(a-b)(b-c)(c-a)$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리한 후, 인수분해 한다.

$$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$$
$$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$$
$$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$$
$$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$$
$$=(b-c)(a-b)(a-c)$$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)$$

7. 두 다항식 $A = x^2 - x - 2$, $B = x^2 - 5x + 6$에 대하여 다음 설명 중 옳은 것은?

① 두 다항식의 최대공약수는 $x - 1$이다.

② 두 다항식의 최소공배수는 $x^3 - 4x^2 - 3x + 6$이다.

③ 두 다항식의 합은 최대공약수와 같다.

④ 두 다항식의 차는 최소공배수와 같다.

⑤ 두 다항식의 곱은 최대공약수와 최소공배수의 곱과 같다.

해설

$A = (x-2)(x+1)$, $B = (x-2)(x-3)$

최대공약수 : $x - 2$

최소공배수 : $(x-2)(x+1)(x-3)$

$\therefore$(두 다항식의 곱) = (최대공약수)×(최소공배수) = $(x-2)^2(x+1)(x-3)$

8. 이차항의 계수가 1 인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$ 이고 최소공배수가 x^3+x^2-2x 일 때, 두 이차식의 합은?

① $2x^2-2x$　② $2x^2+2x$　③ $2x^2+x$
④ $2x^2-2$　⑤ $2x^2+4$

해설

$A=Ga,\quad B=Gb(a,b\text{는 서로소}),\ L=Gab$

$\therefore\ G=(x-1),\quad L=(x-1)x(x+2)$

$$\begin{aligned} A+B=G(a+b) &= (x-1)(x+x+2) \\ &= (x-1)(2x+2) \\ &= 2(x^2-1) \end{aligned}$$

9. 두 다항식 A, B의 최대공약수 G를 $A \cdot B$, 최소공배수 L을 $A \bigstar B$로 나타내기로 한다. 다음 중 $(A^2 \cdot B^2) \bigstar (A^2 \cdot AB)$와 같은 것은?

① 1 ② A ③ AB ④ AL ⑤ AG

해설

$A = aG,\ B = bG$ $(a,\ b$는 서로소)라 하면

$A^2 \cdot B^2 = a^2G^2 \cdot b^2G^2 = G^2$

$A^2 \cdot AB = a^2G^2 \cdot abG^2 = aG^2$

$\therefore (A^2 \cdot B^2) \bigstar (A^2 \cdot AB) = G^2 \bigstar aG^2 = aG^2 = AG$

10. $|x-y|+(y-2)i=5x-2-3xi$를 만족하는 실수를 x, y라 할 때, $\frac{x}{y}$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

(i) $x \geq y$일 때,

$(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$

$x-y=5x-2,\ \ y-2=-3x$

$\therefore\ x=0,\ y=2$($x<y$이므로 부적합)

(ii) $x<y$일 때.

$-(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$

$-x+y=5x-2,\ y-2=-3x$

$\therefore\ x=\frac{4}{9},\ y=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$

11. 다음을 계산하여라.

$$1+i+i^2+\cdots+i^{2006}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : i

해설

$$\begin{aligned}
&1+i+i^2+\cdots+i^{2006}\\
&=1+(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)+\cdots\\
&\quad\cdots+(i^{2001}+i^{2002}+i^{2003}+i^{2004})+(i^{2005}+i^{2006})\\
&=1+(i-1-i+1)+(i-1-i+1)\\
&\quad+\cdots+(i-1-i+1)+(i-1)\\
&=i
\end{aligned}$$

12. $\overline{z} = -z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\overline{w}$ 의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$z = a + bi$ $(a,\ b$ 는 실수$)$로 놓으면 $\overline{z} = a - bi$

$\overline{z} = -z$ 이므로 $a - bi = -(a + bi)$

$a - bi = -a - bi$, $2a = 0$

따라서 $a = 0$ 이므로 $z = bi$

$z = bi$ 를 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$$w = \frac{-1+bi}{1+bi},\ \overline{w} = \overline{\left(\frac{-1+bi}{1+bi}\right)} = \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ \overline{w} &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-1-bi}{1-bi} \\ &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-(1+bi)}{-(-1+bi)} \\ &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{1+bi}{-1+bi} = 1 \end{aligned}$$

13. 복소수 전체의 집합에서 두 복소수 α, β 에 대하여 연산 $\circledcirc$을 $\alpha \circledcirc \beta = (\alpha + i)(\beta + i)$ 로 정의할 때, 등식 $(2+i) \circledcirc z = 1$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $-\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$　　② $-i$　　③ i

④ $1+i$　　⑤ $\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$

해설

$$\begin{aligned}(2+i) \circledcirc z &= \left\{(2+i)+i\right\}(z+i)\\ &= (2+2i)(z+i) = 1\end{aligned}$$

$z + i = \frac{1}{2+2i}$ 이므로

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{2+2i} - i\\ &= \frac{(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} - i\\ &= \frac{2-2i-8i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}i\end{aligned}$$

14. 방정식 $x^2 + |x| = |x-1| + 5$를 만족하는 두 근의 곱은?

① $-2\sqrt{6}$ ② $-\sqrt{6}$ ③ 0
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

ⅰ) $x < 0$일 때
$x^2 - x = -(x-1) + 5,\ x^2 = 6$
$\therefore x = \pm\sqrt{6}$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -\sqrt{6}$
ⅱ) $0 \le x < 1$일 때
$x^2 + x = -(x-1) + 5$
$x^2 + 2x - 6 = 0$
$\therefore x = -1 \pm \sqrt{7}$
그런데 $0 \le x < 1$이므로 해가 없다.
ⅲ) $x \ge 1$일 때,
$x^2 + x = x - 1 + 5,\ x^2 = 4$
$\therefore x = \pm 2$
그런데 $x \ge 1$이므로 $x = 2$
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 주어진 방정식의 해는
$x = 2$또는 $x = -\sqrt{6}$이므로
두 근의 곱은 $-2\sqrt{6}$

15. x에 대한 이차방정식 $(a+1)x^2-4x+2=0$에 대하여 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=1$일 때, 중근을 갖는다.

㉡ $a>1$일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉢ $a<1$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a \neq -1$일 때, 주어진 방정식은 이차방정식이다.
서로 다른 두 실근을 가질 때
$\frac{D}{4}=4-2(a+1)=2-2a>0$
$\therefore a<1$
따라서 $a<-1$ 또는 $-1<a<1$일 때,
서로 다른 두 실근을 갖는다.
중근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a=0$
$\therefore a=1$
따라서, $a=1$일 때, 중근을 갖는다.
서로 다른 두 허근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a<0$
$\therefore a>1$
따라서 $a>1$일 때 서로 다른 두 허근을 갖는다.

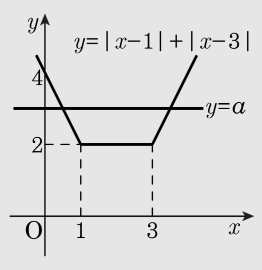
16. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a<2$ ④ $a>2$ ⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면

$a>2$



17. 이차함수 $y = 2x^2 - 2ax - 2a - 4$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$y = 2x^2 - 2ax - 2a - 4$$
$$= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} - 2a - 4$$

y 의 최솟값 : $m = -\frac{a^2}{2} - 2a - 4$

$$= -\frac{1}{2}(a+2)^2 - 2$$

m 의 최댓값 : -2

18. $x^2 + y^2 = 5$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x - y$ 는 $x = \alpha, y = \beta$ 에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m + \alpha + \beta$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2x - y = k$로 놓으면
$y = 2x - k \cdots$ ㉠
㉠을 $x^2 + y^2 = 5$에 대입하면
$x^2 + (2x - k)^2 = 5$
$\therefore 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉡
㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면
x가 실수이므로
$\frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 5)\ 0$, $k^2 \le 25$
$\therefore -5 \le k \le 5$
따라서 k의 최댓값은 5이다.
이 때의 x, y의 값은
㉡에서 $5x^2 - 20x + 20 = 0$, $5(x - 2)^2 = 0 \therefore x = 2$
㉠에서 $y = 4 - 5 = -1$
따라서, $m = 5, \alpha = 2, \beta = -1$이므로
$m + \alpha + \beta = 6$

19. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$ 의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$ 에서
$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$
$x^4-2x^2-3=0$
$x^2=t$ 로 치환하면
$t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(ⅰ) $x^2=3$ 일 때, $x=\pm\sqrt{3}$
(ⅱ) $x^2=-1$ 일 때, $x=\pm i$
(ⅰ), (ⅱ) 에서 실근의 합을 구하면
$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

20. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+5=0$ 의 한 근이 $2-i$ 일 때, 실수 a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^3+ax^2+bx+5=0$ 의 세 근 : $2-i,\ 2+i,\ \alpha$
세 근의 합 : $-a=4+\alpha\cdots$ ①
세 근의 곱 : $-5=(2+i)(2-i)\alpha=5\alpha$
$\therefore \alpha=-1$, ① 식에 대입하면 $a=-3$
$b=(2+i)(2-i)+(2+i)\cdot(-1)+(2-i)\cdot(-1)=5-4=1$
$\therefore a^2+b^2=10$

21. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 x값이 될 수 없는 것은?

① $2\sqrt{2}$　② $-\sqrt{3}$　③ $\sqrt{5}$
④ $-2\sqrt{2}$　⑤ $-\sqrt{5}$

해설

$x^2 + xy - 2y^2 = (x-2y)(x+y) = 0$
㉠ $x = 2y$일 때
$(2y)^2 + y^2 = 5y^2 = 10$
$y^2 = 2$, $y = \pm\sqrt{2}$
$x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$
$x = -2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$
㉡ $x = -y$일 때
$(-y)^2 + y^2 = 2y^2 = 10$, $y^2 = 5$, $y = \pm\sqrt{5}$
$x = -\sqrt{5}, y = \sqrt{5}$
$x = \sqrt{5}, y = -\sqrt{5}$

22. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

ⅰ) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수

: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,

계수$=2$

: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x를 곱할 때,

계수$=1$

ⅱ) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수

$x+x^2+x^3=Y$ 라 하면,

$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$

$3Y=3x+3x^2+3x^3$

일차항의 계수$=3$, 다른 항에는 일차항이 없다.

ⅰ), ⅱ) 에서 $2+1+3=6$

23. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle \mathrm{ABC}$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle \mathrm{ABC}$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle \mathrm{ABC}$는 정삼각형이다.

24. $x^2+x+1=0$일 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2+x+1=0$에서 양변을 x로 나누면

$x+\frac{1}{x}=-1$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=-1-3\cdot(-1)=2$

25. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나머지가 2이다. 다음 [보기]의 다항식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

㉠ $x+f(x)$	㉡ $x-g(x)$
㉢ $x+f(x)g(x)$	

① ㉠　② ㉢　③ ㉠,㉡
④ ㉠,㉢　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

$f(x)+g(x)=(x+1)Q(x)$
$f(x)-g(x)=(x+1)Q'(x)+2$
$x=-1$ 을 두 식에 각각 대입하면
$f(-1)+g(-1)=0 \cdots$ ①
$f(-1)-g(-1)=2 \cdots$ ②
①, ②을 연립하여 풀면 $f(-1)=1, g(-1)=-1$
보기의 식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것은 $x=-1$ 을 대입하면 식의 값이 0 이 된다.
㉠ $-1+f(-1)=-1+1=0$
㉡ $-1-g(-1)=-1+1=0$
㉢ $-1+f(-1)g(-1)=-1+1\times(-1)=-2$
∴ ㉠, ㉡

26. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x+b)$, $(x+b)(x-c)$, $(x-c)(x-a)$로 나눈 나머지가 각각 $x+2$, $-x+4$, 0일 때, 상수 a, b, c의 곱을 구하면?

① 8　　② −8　　③ 12　　④ −12　　⑤ 16

해설

$f(x) = (x-a)(x+b)P(x) + x + 2 \cdots$ ①
$\quad = (x+b)(x-c)Q(x) - x + 4 \cdots$ ②
$\quad = (x-c)(x-a)R(x) \cdots$ ③

나머지 정리에 의해

i) ① 에서 $f(a) = a + 2$, ③ 에서
$f(a) = 0$
$\Rightarrow a = -2$

ii) ① 에서 $f(-b) = -b + 2$, ② 에서
$f(-b) = b + 4$
$\Rightarrow b = -1$

iii) ② 에서 $f(c) = -c + 4$, ③ 에서
$f(c) = 0$
$\Rightarrow c = 4$
$\therefore abc = 8$

27. 복소수 $z = a + bi,\ w = b + ai$ ($a,\ b$는 $ab \neq 0$ 인 실수, $i = \sqrt{-1}$)에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $\bar{z},\ \overline{w}$ 는 각각 $z,\ w$ 의 켤레복소수이다.)

① $i\bar{z} = w$ ② $\dfrac{\overline{w}}{\bar{z}} = \dfrac{z}{w}$

③ $z \cdot \overline{w} = \bar{z} \cdot w$ ④ $z \cdot \bar{z} = w \cdot \overline{w}$

⑤ $i(\bar{z} + \overline{w}) = z + w$

해설

① : $i\bar{z} = i(a - bi) = b + ai = w$

② :①에서 $\bar{z} = -iw$ ······ ㉠

같은 방법으로 $\overline{w} = -iz$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 대입하면 $\dfrac{\overline{w}}{\bar{z}} = \dfrac{-iz}{-iw} = \dfrac{z}{w}$

③ :㉠, ㉡을 대입하면

(좌변) $= z \cdot (-iz) = -iz^2$,

(우변) $= (-iw) \cdot w = -iw^2$

$\therefore$ 좌변$\neq$우변

④ : ②에서 $z \cdot \bar{z} = w \cdot \overline{w}$

⑤ : $i(\bar{z} + \overline{w}) = i\bar{z} + i\overline{w} = w + z = z + w$

28. $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1

④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \Rightarrow \omega^3=1$

$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

29. 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}$을 간단히 하면?

① $\frac{1}{\beta}$　　② $\frac{2}{\beta}$　　③ β　　④ 2β　　⑤ β^2

해설

$\beta^2-\beta+1=0$

$\alpha\beta=1$에서 $\beta=\frac{1}{\alpha}$,

$\beta^2=\frac{1}{\alpha^2}$

$1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=1+\beta+\beta^2=2\beta$

$(\because\ \beta^2+1=\beta\ )$

해설

(별해1)

$1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^2}=\frac{2}{\alpha}\ (\because\ \alpha^2-\alpha+1=0)$

$\alpha\beta=1$에서 $\beta=\frac{1}{\alpha}$

$\therefore\ \frac{2}{\alpha}=2\beta$

(별해2)

$x^2-x+1=0$의 근은 $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha=\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$라 하면

$\frac{2}{\alpha}=\frac{2}{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}=1-\sqrt{3}i=2\beta$

30. $x^2-2kx+1=0$의 해를 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha^3+\beta^3=2$가 되도록 하는 k의 값들의 합을 구하면?

① 1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=1$이므로

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2$에서

$(2k)^3-3\cdot 1\cdot 2k=2$

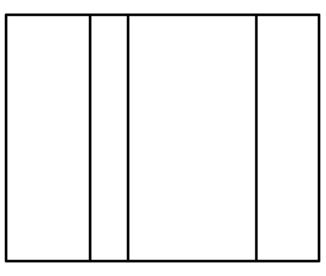
$4k^3-3k-1=0,\ (k-1)(4k^2+4k+1)=0,$

$(k-1)(2k+1)^2=0$

$\therefore\ k=1,\ -\frac{1}{2}$

$\therefore\ k$값들의 합은 $\frac{1}{2}$

31. 어떤 농부가 길이 700m 의 철망을 가지고 그림과 같은 모양의 가축우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이를 최대로 하는 바깥 직사각형의 가로, 세로의 길이 중 짧은 것은 몇 m 인가?



① 60m ② 70m ③ 80m ④ 90m ⑤ 100m

해설

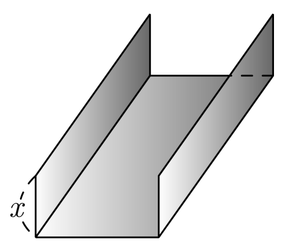
세로의 길이를 x 라 하면 세로가 5 개 있으므로 필요한 길이는 $5x$,

가로의 길이는 $\frac{1}{2}(700-5x)$ 이다. 전체 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(700-5x)\cdot x \\ &= -\frac{5}{2}x^2+350x \\ &= -\frac{5}{2}(x^2-140x+70^2-70^2) \\ &= -\frac{5}{2}(x-70)^2+12250 \end{aligned}$$

따라서 넓이는 세로가 70m , 가로가 175m 일 때 최대이다.

32. 다음 그림과 같이 폭이 20 cm 인 양철판을 구부려서 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대일 때, x의 값은?



① 4 cm ② 5 cm ③ 6 cm ④ 7 cm ⑤ 8 cm

해설

단면의 세로의 길이를 x cm 라 하면
가로의 길이는 $(20-2x)$ cm
단면의 넓이를 S m^2 라 하면
$S = x(20-2x) = -2x^2 + 20x$
$= -2(x-5)^2 + 50 \ (0 < x < 10)$
따라서 $x = 5(\mathrm{cm})$ 일 때,
S 는 최댓값 $50\,\mathrm{m}^2$ 를 갖는다.

33. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab의 값은?

$$\boxed{x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0,\ x^3 + 2x^2 + ax + b = 0, x^2 + bx + a = 0}$$

① -1　　② 3　　③ $-\frac{9}{4}$　　④ $\frac{9}{16}$　　⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3) = 0$ $\therefore\ x = 1$ 또는 $x = -3$

(i) 공통근이 $x = 1$인 경우 나머지 두 방정식에 $x = 1$을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$값은 없다.

(ii) 공통근이 $x = -3$인 경우 다른 두 방정식은 $x = -3$을 근으로 하므로 $\{-27 + 18 - 3a + b = 0\}$ ⋯⋯ ㉠

$\{9 - 3b + a = 0\}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a = -\frac{9}{4},\ b = \frac{9}{4},\ ab = -\frac{81}{16}$

34. x^4 을 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫을 $q(x)$, 나머지를 r_1 이라 하고, $q(x)$ 를 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 나머지를 r_2 라 할 때, r_2 의 값은?

① $-\frac{1}{8}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

해설

$x^4 = \left(x+\frac{1}{2}\right)q(x) + r_1$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$r_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4$

$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)q(x) = x^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^4$

이때, $a = -\frac{1}{2}$ 로 놓으면 $(x-a)q(x) = x^4 - a^4$

$$\begin{aligned}\therefore\ q(x) &= (x^4 - a^4) \div (x-a)\\ &= (x+a)(x^2+a^2)\end{aligned}$$

따라서, $q(x)$ 를 $x-a$ 로 나눈 나머지 r_2 는

$q(a) = 4a^3$

$$\begin{aligned}\therefore\ q\left(-\frac{1}{2}\right) &= 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

35. 두 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$과 $x^3 + bx^2 + ax + 1$의 최대공약수가 일차식일 때, $a + b$의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$A(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, $B(x) = x^3 + bx^2 + ax + 1$로 놓으면

$A(x) - B(x)$

$= (x^3 + ax^2 + bx + 1) - (x^3 + bx^2 + ax + 1)$

$= (a - b)x(x - 1)$

$A(x),\ B(x)$의 최고차항의 계수가 1 이므로 최대공약수는 x 이거나 $x - 1$ 이 될 수 있지만 두 다항식의 상수항이 1이므로 최대공약수는 $x - 1$ 이다.

따라서 다항식 $A(x)$ 는 $x - 1$ 을 인수로 가지므로 나머지정리에 의하여

$A(1) = 1 + a + b + 1 = 0$

$\therefore\ a + b = -2$