

1. 점 $(1, 2)$ 를 중심으로 하고 점 $(3, -2)$ 를 지나는 원의 방정식은?

① $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

② $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 32$

③ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$

④ $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 12$

⑤ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

해설

원의 반지름을 r 이라 하면

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$ 이 $(3, -2)$ 를 지나므로

$$(3 - 1)^2 + (-2 - 2)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 20$$

$$\therefore (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$$

2. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ 의 중심이 (a, b) , 반지름의 길이가 r 일 때, $a + b + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

따라서, 중심은 $(2, 3)$

반지름의 길이가 4 이므로

$$a = 2, b = 3, r = 4$$

$$\therefore a + b + r = 9$$

3. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$

② $c^2 = b$

③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$

⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은
 $x = 0$ 으로부터 $y^2 + 2by + c = 0$
 y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

4. $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서 접하는 직선이 있다. 이 직선의 기울기를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

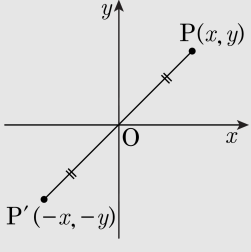
원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서의
접선의 방정식은 $-3 \cdot x + 1 \cdot y = 10$
따라서 이 직선의 기울기는 3

5. 다음 중 좌표평면 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 를 원점에 대하여 대칭이동시키는 것을 나타낸 식은?

- ① $f : (x, y) \rightarrow (-x, -y)$
- ② $f : (x, y) \rightarrow (-y, x)$
- ③ $f : (x, y) \rightarrow (-x, y)$
- ④ $f : (x, y) \rightarrow (x, y)$
- ⑤ $f : (x, y) \rightarrow (y, x)$

해설

좌표 평면 위에 직선 $y = x$ 위에 있지 않은 임의의 한 점을 잡아서 직접 원점에 대해 대칭시켜서 두 점의 좌표 사이의 관계를 찾아본다.
다음 그림과 같이 좌표평면 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 을 원점에 대하여 대칭이동시키면 점 $P'(-x, -y)$ 이 되므로 이를 옳게 나타낸 식은 $f : (x, y) \rightarrow (-x, -y)$ 이다.



6. 두 점 A(1, 2), B(-1, 4)를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$

② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 8$

③ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

④ $x^2 + (y-3)^2 = 2$

⑤ $x^2 + y^2 = 2$

해설

원의 중심 : $\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (0, 3)$

반지름 : $\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}$

∴ 원의 방정식 : $x^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{2})^2$

7. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + c = 0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 c 의 값의 범위를 정하면?

① $c < 1$ ② $c < 2$ ③ $c < 3$ ④ $c < 4$ ⑤ $c < 5$

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 5 - c$$

$$\therefore (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - c \quad \leftarrow \quad 5 - c = r^2$$

이 방정식의 그래프가 원이 되려면

$$5 - c > 0 \quad \leftarrow \quad r^2 > 0$$

$$\therefore c < 5$$

8. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

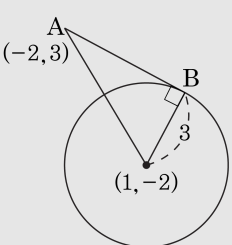
9. 점 A(-2, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$
$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$
원의 중심은 (1, -2), 반지름은 3 이므로
$$AB = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



10. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은 $y = x \pm$ ()이다. ()안의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

직선과 원이 접하면 원의 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$y = x + k$ 라 하면

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2, \quad k = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore y = x \pm 2\sqrt{2}$$

11. 점 A(2, 1)를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 점이 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(2 - 1, 1 + 4) = (a, b)$ 따라서 $a + b = 6$

12. 직선 $ax + by = 1$ 을 x 축의 방향으로 -2 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행 이동한 직선이 $2x - 3y + 12 = 0$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선 $ax + by = 1$ 을 x 축의 방향으로 -2 ,
 y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하면
 $a(x + 2) + b(y - 3) = 1$, $ax + by + 2a - 3b - 1 = 0$
이 직선이 $2x - 3y + 12 = 0$ 과 같으므로
 $\frac{a}{2} = \frac{b}{-3} = \frac{2a - 3b - 1}{12}$
이 식을 풀면 $a = 2$, $b = -3$ 이다.
 $\therefore a + b = -1$

13. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 외접할 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 의 중심 사이의 거리 $d = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$
두 원이 외접하면 $r + 2 = 5$ 이므로 $r = 3$

14. 두 원 $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$ 의 교점과 점(1,1)을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B - C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 5)m + x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

의 꼴이고, 이 원이 점 (1,1)을지나므로

$$(1 + 1 - 5)m + 1 + 1 - 3 - 1 - 4 = 0$$

$$\therefore m = -2$$

이 값을 대입하고 정리하면

$$x^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore A = 3, B = 1, C = -6$$

$$\text{그러므로 } A + B - C = 10$$

15. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2$, $(x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 4개

해설

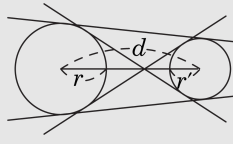
먼저 두 원의 반지름의 길이의
합 $r + r'$, 차 $r \sim r'$, 중심거리 d 를 구하
여

두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

 $r + r' = 5, r \sim r' = 1 \quad d = 9$ 이므로

$r+r'=5, r \sim r'=1, d=9$ 이므로
 $r+r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두
 4 개



16. 직선 $y = 2x + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$

② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$

④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$

⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식

$$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5(b^2 - 4) = -b^2 + 20$$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\textcircled{1}$ 이

실근을 갖지 않아야 하므로

$$\frac{D}{4} < 0 \text{ 에서 } -b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$$

$$\therefore b < -2\sqrt{5} \text{ 또는 } b > 2\sqrt{5}$$

17. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행 이동하였더니 직선 $ax + y + 1 = 0$ 과 접하였다. 이 때, 양수 a 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

해설

원 $x^2 + y^2 = 1$ 을
 x 축의 방향으로 2, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면,
 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$
이 원이 직선 $ax + y + 1 = 0$ 과 접하므로
원의 중심 $(2, -1)$ 에서 직선까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.
즉, $\frac{|2a - 1 + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1$ 에서 $|2a| = \sqrt{a^2 + 1}$,
 $4a^2 = a^2 + 1, a^2 = \frac{1}{3}$
 $\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because a > 0$)

18. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 개의 접선의 기울기를 합하면?

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{5}{2}$

③ 0

④ $-\frac{3}{2}$

⑤ $-\frac{5}{2}$

해설

$(3, -1)$ 을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면

$$y = m(x - 3) - 1 = mx - 3m - 1$$

원 중심에서 접선까지 거리는 반지름과 같으므로

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$(-3m - 1)^2 = 5m^2 + 5$$

$$4m^2 + 6m - 4 = 0$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$m = -2, \frac{1}{2}$$

19. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

OP의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 OP $\sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

20. 지름의 길이가 15 cm 인 원에 내접하며 둘레의 길이가 42 cm 인 직사각형의 두 변의 길이는?

- ① 6 cm, 8 cm ② 6 cm, 10 cm ③ 6 cm, 12 cm
④ 9 cm, 10 cm ⑤ 9 cm, 12 cm

해설

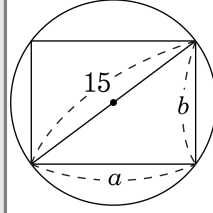
i) $a + b = \frac{42}{2} = 21$

ii) $a^2 + b^2 = 15^2$

i), ii) 를 연립하면, $a^2 + (21 - a)^2 - 225 = 0$

$\Rightarrow a = 12, 9$

$\therefore$ 두 변의 길이는 12 cm, 9 cm

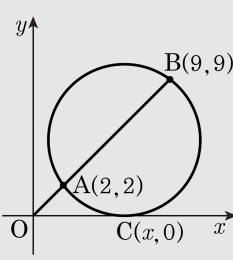


21. 좌표평면 위의 두 점 (2, 2), (9, 9) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

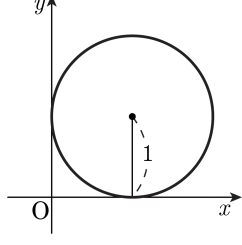
- ① $\frac{9}{2}$
- ② 5
- ③ $\frac{11}{2}$
- ④ 6
- ⑤ $\frac{13}{2}$

해설

다음 그림에서
 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$
 $\therefore x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36$
 $\therefore x = 6$



22. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 (x, y) 에 대하여 $\frac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{y+2}{x+1} = k$ 라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은

k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$ 를 지난다.

이 때, 기울기 k 는 직선이 원에 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$$

$$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$$

$$3k^2 - 12k + 8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로

근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.

23. 다음은 점 $P(a, b)$ 의 직선 $y = x$ 에 대해 대칭인 점 Q 의 좌표 (x, y) 를 구하는 과정이다.

에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

(1) $\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right)$ 은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $\frac{y+b}{2} = \frac{x+a}{2}$
 $\therefore x-y = b-a \cdots \textcircled{1}$

(2) 직선 PQ 는 직선 $y=x$ 에 수직이므로 $\frac{y-b}{x-a} = -1$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 연립하여 x, y 를 구하면 $x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2}$ 이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

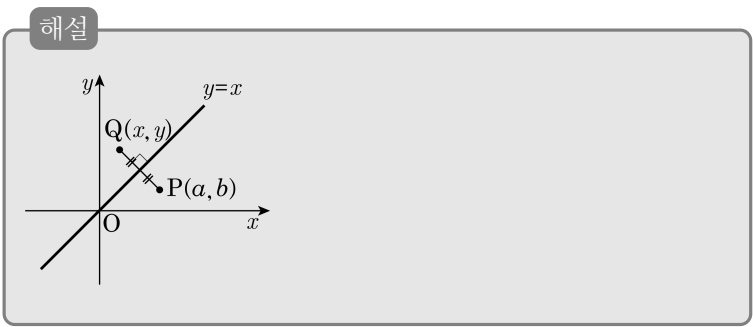
▶ 답 :

▷ 정답 : $y = x$

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : b

▷ 정답 : a



24. (3, 1)의 직선 $y = 2x + 3$ 에 대한 대칭점을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 는?

- ㉠ $\frac{4}{5}$ ㉡ 1 ㉢ $\frac{6}{5}$ ㉣ $\frac{5}{3}$ ㉤ 2

해설

점 (a, b) 와 (3, 1)을 지나는 직선은 직선 $y = 2x + 3$ 와 수직이다.

이 직선은 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ 로 나타낼 수 있다.

점 (a, b) 는 이 직선 위의 점이므로

$\left(a, -\frac{1}{2}a + \frac{5}{2}\right)$ 와 같다.

$\left(a, -\frac{1}{2}a + \frac{5}{2}\right)$ 는 직선 $y = 2x + 3$ 과의 거리가

점 (3, 1)과 직선 $y = 2x + 3$ 과의 거리와 같으므로

점과 직선 사이의 거리에서

$$\frac{|2 \cdot 3 + 3 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{\left|2a + 3 + \frac{1}{2}a - \frac{5}{2}\right|}{\sqrt{5}}$$

$$|5a + 1| = 16$$

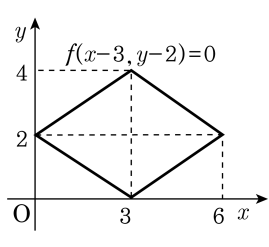
$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } -\frac{17}{5}$$

(3, 1)의 대칭점이 (a, b) 이므로 $a \neq 3$,

$$a = -\frac{17}{5} \text{ 일 때, } b = \frac{21}{5}$$

$$\therefore a + b = \frac{4}{5}$$

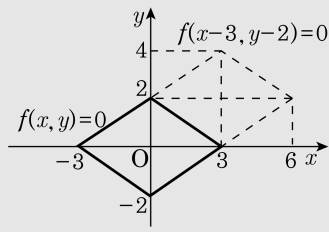
25. 방정식 $f(x-3, y-2) = 0$ 이 나타내는 도형이 다음 그림과 같을 때 방정식 $f(x+2, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표 평면 위에 바르게 나타낸 것은?



- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

해설

주어진 $f(x-3, y-2) = 0$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 다음 그림과 같이 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를 얻을 수 있다.



$f(x+2, y) = 0$ 은 $f(x, y) = 0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

