

1. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = -2$ 일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(4) = 4$
모든 x 에 대하여 $g(x) = -2$ 이므로
 $g(x)$ 는 상수함수이다.
즉, $g(-1) = -2$
 $\therefore f(4) + g(-1) = 4 + (-2) = 2$

2. 집합 $X = \{x|x \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 는 상수 함수이다. $f(2) = 2$ 일 때, $f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(19)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 100 ② 50 ③ 38 ④ 20 ⑤ 10

해설

$f(x)$ 가 상수함수이므로,
 $f(1) = f(3) = \dots = f(19) = 2$
 $\therefore f(1) + f(3) + \dots + f(19) = 2 \cdot 10 = 20$

3. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 X 로의 항등함수를 모두 고른 것은 무엇인가?

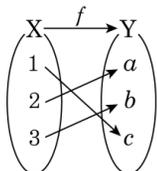
$$\begin{aligned} f(x) &= x, & g(x) &= |x| \\ h(x) &= x^3, & k(x) &= \frac{|x+1| - |x-1|}{2} \end{aligned}$$

- ① f ② f, h ③ f, g, h
④ f, h, k ⑤ g, h, k

해설

$f: f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 이므로 항등함수이다.
 $g: g(-1) = 1$ 이므로 항등함수가 아니다.
 $h: h(-1) = -1, h(0) = 0, h(1) = 1$ 이므로 항등함수이다.
 $k: k(-1) = -1, k(0) = 0, k(1) = 1$ 이므로 항등함수이다.
따라서 항등함수인 것은 f, h, k 이다.

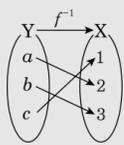
4. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 그림과 같이 주어질 때, $f^{-1}(a) + f^{-1}(c)$ 의 값은 얼마인가?



- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

역함수 f^{-1} 는 그림과 같으므로



$$f^{-1}(a) + f^{-1}(c) = 2 + 1 = 3$$

5. 다음 함수 $y = 2x - 5$ ($x \geq 1$) 의 역함수를 구하면?

① $y = 2x - 5$

② $y = 2x - 5$ ($x \geq 1$)

③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

④ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ($x \geq 1$)

⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ($x \geq -3$)

해설

$$y = 2x - 5 \ (x \geq 1, y \geq -3) \rightarrow x = 2y - 5$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

여기서 $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$ 이므로 $x \geq -3$ 이 된다.

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \ (x \geq -3)$$

6. 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f^{-1}(2)$ 의 값은?

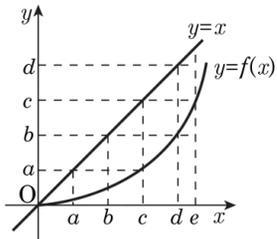
- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$$f^{-1}(2) = a \text{ 라 하면, } f(a) = 2 \text{ 이므로 } 2a - 3 = 2$$

$$\therefore a = \frac{5}{2}$$

7. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $(f \circ f)^{-1}(a)$ 의 값은 얼마인가?

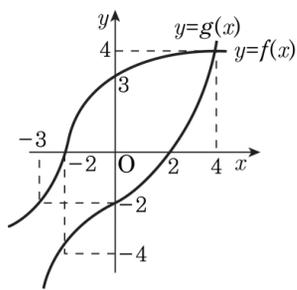


- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f \circ f)^{-1}(a) = (f^{-1} \circ f^{-1})(a)$
 $= f^{-1}(f^{-1}(a)) \dots \text{㉠}$
 $f^{-1}(a) = m$ 으로 놓으면 $f(m) = a$ 이고,
 그래프에서 $f(c) = a$ 이므로 $m = c$
 $\therefore f^{-1}(a) = c$
 이 때, ㉠에서
 $(f \circ f)^{-1}(a) = f^{-1}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(c) \dots \text{㉡}$
 또, $f^{-1}(c) = n$ 으로 놓으면 $f(n) = c$ 이고
 그래프에서 $f(e) = c$ 이므로 $n = e$
 $\therefore f^{-1}(c) = e$
 따라서, ㉡에서
 $(f \circ f)^{-1}(a) = f^{-1}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(c) = e$

8. 일대일 대응인 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g \circ f^{-1})(3)$ 의 값을 구하여라.



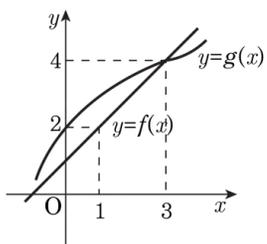
▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$ 이므로
 그래프를 이용하여 $f^{-1}(3)$ 의 값을 찾는다.
 $f^{-1}(3) = a$ 라 하면 $f(a) = 3$
 $\therefore a = 0$
 $\therefore (g \circ f^{-1})(3) = g(f^{-1}(3)) = g(0) = -2$

9. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 각각 일대일대응이고 그 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g^{-1} \circ f)(1) + g(3)$ 의 값은 얼마인가?



- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

주어진 식을 간단히 하면

$$(g^{-1} \circ f)(1) + g(3) = g^{-1}(f(1)) + 4$$

$$= g^{-1}(2) + 4$$

$$g^{-1}(2) = k \text{로 놓으면 } g(k) = 2$$

문제의 그림에서 $y = g(x)$ 의 그래프가

$$(0, 2) \text{를 지나므로 } g(0) = 2$$

이 때, $y = g(x)$ 는 일대일대응이므로 $k = 0$

$$\therefore g^{-1}(2) + 4 = 0 + 4 = 4$$

10. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5, g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로
 $2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서
 $3x^2 - 12x - 15 = 0, 3(x^2 - 4x - 5) = 0$
 $(x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5, -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.
 $\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

11. 다항식 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이고 $g(1) = 0$ 일 때, $g(-1)$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$g(x)$ 가 n 차 다항식이라 하면
 $g(g(x))$ 의 차수는 n^2 이다.
모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이므로
양변의 차수를 비교하면 $n^2 = 1$
 $\therefore n = 1$ ($\because n$ 은 자연수)
즉, $g(x)$ 는 일차다항식이므로
 $g(x) = ax + b$ 라 하면 $g(1) = 0$ 이므로
 $a + b = 0$, 즉 $b = -a$
 $\therefore g(x) = ax + b = ax - a$
 $g(g(x)) = g(ax - a) = a(ax - a) - a$
 $= a^2x - a^2 - a = x$
이 식은 x 에 대한 항등식이므로
 $a^2 = 1$, $-a^2 - a = 0$
 $\therefore a = -1$
즉, $g(x) = -x + 1$ 이므로 $g(-1) = 2$

12. 두 함수 $f(x) = -3x+k$, $g(x) = 2x+4$ 에 대하여, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 하는 k 의 값은 얼마인가?

① -16 ② -14 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x+k, g(x) = 2x+4 \text{에서} \\ (f \circ g)(x) &= f(2x+4) = -3(2x+4) + k \\ &= -6x - 12 + k \cdots \text{㉠} \\ (g \circ f)(x) &= g(-3x+k) = 2(-3x+k) + 4 \\ &= -6x + 2k + 4 \cdots \text{㉡} \\ \text{㉠과 ㉡이 같아야 하므로} \\ -6x - 12 + k &= -6x + 2k + 4 \\ \therefore k &= -16 \end{aligned}$$

13. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+k & (x \geq 0) \\ -x+k & (x < 0) \end{cases} \text{가 } f^{-1}(2) = -3 \text{을 만족시킬 때, } f(5) \text{의}$$

값은 얼마인가?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$f^{-1}(2) = -3 \text{에서 } f(-3) = 2 \text{이므로}$$

$$f(-3) = 3 + k = 2$$

$$\therefore k = -1 \text{이므로 } f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\therefore f(5) = 5 - 1 = 4$$

14. $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 0) \\ -2x & (x \geq 0) \end{cases}$ 일 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(4)$ 의 값은 얼마인가?

- ① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 4

해설

$(f^{-1} \circ f^{-1})(4) = (f \circ f)^{-1}(4) = a$ 라 놓으면,
 $(f \circ f)(a) = f(f(a)) = 4$
 $f(-2) = (-2)^2 = 4$ 이므로 $f(a) = -2$
또, $f(1) = -2 \cdot 1 = -2$
 $\therefore a = 1$

15. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ 1-x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f^{-1}(3) = b \text{ 라고 하면 } f(b) = 3 \text{ 에서 } 2b + 1 = 3$$

$$\therefore b = 1$$

이 때, $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 에서

$$1 + f^{-1}(a) = 0, f^{-1}(a) = -1$$

$$\therefore f(-1) = a$$

$$\therefore a = 1 - (-1)^2 = 0$$

16. $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ 2x + 1 & (x < 0) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 7$ 일때, $(g^{-1} \circ f)^{-1}(3)$ 의 값은 얼마인가?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$(g^{-1} \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ (g^{-1})^{-1} = f^{-1} \circ g$ 이고
 $g(x) = 3x - 7$ 에서 $g(3) = 3 \times 3 - 7 = 2$ 이다.
 $(g^{-1} \circ f)^{-1}(3) = (f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3))$
 $= f^{-1}(2)$
 $(f^{-1})(2) = a$ 라 하면 $f(a) = 2$
그런데 $a < 0$ 일 때, $2a + 1 < 1$ 이므로
이 범위에서 $f(a) = 2$ 가 되는 a 는 없다.
따라서, $a \geq 0$ 이고 $f(a) = 4a^2 + 1 = 2$ 에서
 $4a^2 = 1$
 $\therefore a = \frac{1}{2} (\because a \geq 0)$
 $\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(3) = \frac{1}{2}$

17. $f(x) = \begin{cases} x(x \leq 0) \\ x^2(x > 0) \end{cases}$, $g(x) = f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x) = g^{-1}(x)$

라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} h(0) &= g^{-1}(0) = k \\ g(k) &= f(k+4) = 0 \\ \therefore k+4 &= 0 \\ \therefore k &= -4 \\ \therefore h(0) &= -4 \end{aligned}$$

18. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ x + 1 & (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5) + g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$g(5) = a$ 라 하면 $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ 이므로
 $f(a) = a^2 + 1 = 5$
 $\therefore a = 2 (\because a \geq 0) \therefore g(5) = 2$
또, $g(0) = b$ 라 하면 $f^{-1}(0) = b$ 에서 $f(b) = 0$
그런데 $x < 0$ 일 때, $f(x) = x + 1 < 1$ 이므로
 $f(b) = b + 1 = 0$
 $\therefore b = -1 \therefore g(0) = -1$
 $\therefore g(5) + g(0) = 2 - 1 = 1$

19. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3) = 1$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$
따라서 $f(3) = f^{-1}(3) = 1$

20. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f(5) = -2$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f^{-1}(5)$ 의 값은?

- ① -5 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$
따라서 $f^{-1}(5) = f(5) = -2$

21. 점 (2, 1)을 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-2)$ 의 값은?

- ① -5 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

$$f = f^{-1} \text{ 이므로 } (f \circ f)(x) = x$$

$$f(x) = m(x-2) + 1 = mx - 2m + 1 \quad (m \neq 0) \text{ 으로 놓으면}$$

$$f(f(x)) = m(mx - 2m + 1) - 2m + 1 = x$$

$$\therefore m^2x - 2m^2 - m + 1 = x$$

$$\text{즉, } m^2 = 1, -2m^2 - m + 1 = 0 \text{ 이므로}$$

$$m = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = -x + 3 \text{ 이고}$$

$$f(-2) = -(-2) + 3 = 5 \text{ 이다.}$$

22. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -4x - 5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 5 ② 3 ③ 1 ④ -3 ⑤ -5

해설

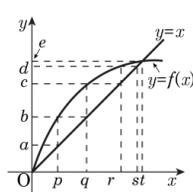
$h(x) = ax + b$ 로 놓으면
 $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x + 3)$
 $= a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
 $2ax + 3a + b = -4x - 5$,
 $2a = -4, 3a + b = -5$
즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$
 $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
 $h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로
 $h(2x + 3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
 $h(3) = g(0) = -5$

23. 림은 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f \circ f)(x) = d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?

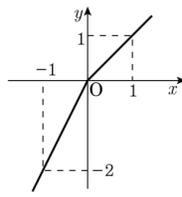
- ① p ② q ③ r
 ④ s ⑤ t



해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = d \dots \dots \textcircled{1}$
 그런데, 주어진 그래프에서 $f(r) = d$ 이므로
 $\textcircled{1}$ 에서 $f(x) = r$
 $\therefore r = c$ 에서 $f(x) = r = c$
 $\therefore x = q$

24. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 원점과 두 점 $(1, 1), (-1, -2)$ 를 각각 지나는 두 반직선으로 이루어져 있다. 이 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

- ㉠ $f(10) = f(f(10))$
- ㉡ $f^{-1}(-2) = -1$
- ㉢ $y = f(x)$ 의 그래프와 $f(x)$ 의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 두 개뿐이다.

- ① ㉠
- ② ㉢
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠ $f(10) = 10$
 $f(f(10)) = f(10) = 10$
 $\therefore f(10) = f(f(10))$ (참)
- ㉡ $f(-1) = -2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2) = -1$ (참)
- ㉢ $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 $y = x$ 에 대하여 대칭이동시킨 그래프이다.
 따라서 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 는 무수히 많은 점에서 만난다. (거짓)
 따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡ 이다.

25. 자연수 n 에 대하여 n^2 을 오진법으로 표시했을 때 일의 자리수를 $f(n)$ 이라 하자. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

- ㉠ $f(3) = 4$
 ㉡ $0 \leq f(n) \leq 4$
 ㉢ $f(n) = 2$ 인 자연수 n 은 없다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $f(3)$ 은 3^2 을 오진법으로 표시한 일의 자리수이므로 $3^2 = 5 \times 1 + 4 = 14_{(5)}$ 에서 $f(3) = 4$ \therefore 참
 ㉡. 오진법으로 쓸 때 1의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4만이 올 수 있으므로 $0 \leq f(n) \leq 4$ \therefore 참
 ㉢. $f(n) = 2$ 이므로 $n^2 = p_k 5^k + p_{k-1} 5^{k-1} + \dots + p_2 5^2 + p_1 \cdot 5 + 2$ ($p_i = 0, 1, 2, 3, 4$)의 꼴로 나타낼 수 있다. 즉, n^2 을 5로 나눈 나머지가 2가 된다는 뜻이다. 그런데 정수 l 에 대하여
 i) $n = 5l$ 이면 $n^2 = 25l^2$ 즉, 5로 나눈 나머지는 0이다.
 ii) $n = 5l + 1$ 이면 $n^2 = (5l + 1)^2 = 25l^2 + 10l + 1$ 즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.
 iii) $n = 5l + 2$ 이면 $n^2 = (5l + 2)^2 = 25l^2 + 20l + 4$ 즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.
 iv) $n = 5l + 3$ 이면 $n^2 = (5l + 3)^2 = 25l^2 + 30l + 5 + 4$ 즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.
 v) $n = 5l + 4$ 이면 $n^2 = (5l + 4)^2 = 25l^2 + 40l + 15 + 1$ 즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.
 모든 자연수 n 은 i), ii), iii), iv), v) 중 어느 한 꼴로 표현이 가능하므로 5로 나눈 나머지가 2가 되는 경우는 없다.
 \therefore 참

26. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

$$\begin{aligned} \text{(i)} & f(2x) = f(x) \quad (x = 1, 2, 3, \dots) \\ \text{(ii)} & f(2x+1) = 2^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

- ① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$$\begin{aligned} 1280 &= 2^8 \cdot 5 \text{ 이므로,} \\ f(2^8 \cdot 5) &= f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \dots = f(5) \\ &= f(2 \cdot 2 + 1) \text{ 이므로,} \\ f(2 \cdot 2 + 1) &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

27. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 집합 $B = \{3, 4, 5, 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

- ① 14 개 ② 18 개 ③ 20 개 ④ 24 개 ⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는

$f(1)$: 4 가지

$f(2)$: 3 가지

$f(3)$: 2 가지

$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)

그런데 $f(3) = 3$ 인 것이 6 가지 이므로

$f(x) \neq x$ 인 것은

$\therefore 24 - 6 = 18$ (가지)

28. $f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = 4-2x$ 일 때, $(f \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$$\frac{2x-1}{3} = t \text{ 로 놓으면}$$

$$2x-1 = 3t \text{ 이므로 } x = \frac{3t+1}{2}$$

$$f(t) = 4 - 2 \cdot \frac{3t+1}{2} = -3t + 3$$

$$\therefore (f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(-3) = 12$$

29. 함수 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 에 대하여 $f(x)$ 를 20 번 합성한 함수의 $(f \circ f \circ \dots \circ f)\left(\frac{1}{10}\right)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{200}$ ② $\frac{1}{100}$ ③ $\frac{1}{30}$ ④ $\frac{1}{20}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

해설

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= \frac{\frac{x}{1+x}}{1 + \frac{x}{1+x}} \\ &= \frac{x}{1+2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ f \circ f)(x) &= f((f \circ f)(x)) \\ &= \frac{\frac{x}{1+2x}}{1 + \frac{x}{1+2x}} \\ &= \frac{x}{1+3x} \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n\text{개}} f(x) = \frac{x}{1+nx}$$

$$\therefore \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{20\text{개}} f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{\frac{1}{10}}{1 + 20 \cdot \frac{1}{10}} = \frac{1}{30}$$

30. 양의 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & (x \geq 1) \\ \frac{1}{x} + 1 & (0 < x < 1) \end{cases} \quad \text{일 때, } (f \circ f \circ f)(a) = 5 \text{ 를 만족하는}$$

상수 a 의 값을 구하면?

- ① -3 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$(f \circ f \circ f)(a) = 5$ 에서 $f(f(f(a))) = 5$ 이므로

$f(f(a)) = f^{-1}(5) = k_1$ 이라 하면 $f(k_1) = 5$

$5 > 1$ 이므로 $0 < k_1 < 1$, $\frac{1}{k_1} + 1 = 5$

$$\therefore k_1 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(f(a)) = \frac{1}{4}$$

$$f(a) = f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = k_2 \text{라 하면 } f(k_2) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} < 1 \text{ 이므로 } k_2 \geq 1, \frac{1}{k_2+1} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore k_2 = 3$$

$f(a) = 3$ 에서 $3 \geq 1$ 이므로 $0 < a < 1$

$$\therefore \frac{1}{a} + 1 = 3, a = \frac{1}{2}$$

31. 두 함수 f, g 가 일대일 대응일 때, 다음 중 $g \circ (f \circ g)^{-1}$ 와 같은 것을 고르면?

- ① f ② f^{-1} ③ g
④ g^{-1} ⑤ $g \circ f^{-1}$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)^{-1} &= g^{-1} \circ f^{-1} \text{ 이므로} \\ g \circ (f \circ g)^{-1} &= g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} \\ &= f^{-1}\end{aligned}$$

32. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것을 고르면?

- ① $n(X) = n(Y)$ 이다.
- ② $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.
- ③ $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.
- ④ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.
- ⑤ $y = f(x)$ 의 정의역은 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역과 일치한다.

해설

⑤ (f 의 정의역) = (f^{-1} 의 치역)
(f^{-1} 의 정의역) = (f 의 치역)

33. $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$), $g(x) = x + c$ 라 할 때, $(f \circ g)(x) = 2x - 3$, $f^{-1}(3) = -2$ 가 성립한다. 상수 a, b, c 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = 7$

▷ 정답: $c = -5$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(x + c) = a(x + c) + b = ax + ac + b$$

$$\therefore a = 2 \cdots \text{㉠}$$

$$ac + b = -3 \cdots \text{㉡}$$

$$f^{-1}(3) = -2 \text{이므로, } f(-2) = 3$$

$$\therefore -2a + b = 3 \cdots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$\therefore a = 2, b = 7, c = -5$$