

1. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 할 때, ' p 또는 $\sim q$ '를 만족하는 집합을 구하면?

① $P - Q$

② $Q - P$

③ $P^c \cup Q$

④ $P \cup Q^c$

⑤ $P \cap Q^c$

해설

조건 $\sim q$ 를 만족하는 집합이 Q^c 이므로 ' p 또는 $\sim q$ '를 만족하는 집합은 $P \cup Q^c$ 이다.

2. 다음 조건을 p 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여 p 가 참인 것을 모두 고르면?

① $|x| = x$

② $x^2 = 1$

③ $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$

④ $x^2 \geq 0$

⑤ $x^2 + 1 > 2x$

해설

- ① 모든 실수 x 에 대하여 $|x| = x$ (거짓)
 $x \geq 0$ 일 때 $|x| = x$, $x < 0$ 일 때 $|x| = -x$ 이다.
② 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 = 1$ (거짓)
 $x = \pm 1$ 일 때만 $x^2 = 1$ 이다.
③ 모든 실수 x 에 대하여 $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ (참)
④ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ (참)
⑤ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 1 > 2x$ (거짓) $x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 \geq 0$ 이므로 $x \neq 1$ 인 x 에 대해서만 $x^2 + 1 > 2x$ 이다.

3. 두 실수 x, y 에 대하여 다음 명제가 참일 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

$x + y < 8$ 이면 $x < -2$ 또는 $y < k$

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
따라서 $x \geq -2$ 이고 $y \geq k$ 이면 $x + y \geq 8$
 $x \geq -2, y \geq k$ 에서 $x + y \geq k - 2$ 이므로
 $k - 2 \geq 8, \therefore k \geq 10$
따라서 k 의 최솟값은 10이다.

4. 양수 x 에 대하여 명제 ' $ax^2 - a^2x + 2 \neq 0$ 이면 $x \neq 1$ 이다.'가 참이기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

' $x = 1$ 이면 $ax^2 - a^2x + 2 = 0$ 이다.'가 참이므로

$$a - a^2 + 2 = 0, \quad a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a + 1)(a - 2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 2$$

5. 우리 학교에서 다음 두 명제는 참이다.

- ㉠

우리학교 동아리 회원들은 축제에 참석한다.
- ㉡

우리학교 어떤 학생들은 축제에 참석하지 않는다.

이 때, 다음 명제 중 참인 것은?

- ①

어떤 동아리 회원들은 우리학교 학생이 아니다.
- ②

우리학교 학생들은 모두 동아리 회원이다.
- ③

동아리 회원들은 우리학교 학생이 아니다.
- ④

우리학교 어떤 학생들은 동아리 회원이 아니다.
- ⑤

우리학교 어떤 학생들은 동아리 회원이다

해설

①, ②, ③은 직관적으로 판단해도 거짓이다. 우리 학교 어떤 학생들은 축제에 참석하지 않았고, 모든 우리학교 동아리 회원들은 축제에 참석하였다고 하였으므로 우리학교 학생 중에는 동아리 회원이 아닌 학생이 있음을 알 수 있다.따라서 ④는 참이다. 한편 동아리 회원이 한 명도 없는 경우도 주어진 두 조건 ㉠, ㉡를 만족하므로 ⑤번은 거짓이 된다.

∴ 답 ④

6. 다음 두 조건 $p : 2 \leq x \leq 5$, $q : x \geq a$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 각각의 진리집합을 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$ 이 성립해야 한다. 따라서 $2 \leq x \leq 5$ 를 만족하는 영역은 $x \geq a$ 를 만족하는 영역에 포함되어야 함으로 $a \leq 2$ 따라서 a 의 최댓값은 2

7. $x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이고, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이므로
「 $x \leq a$ 이면 $x \leq -1$ 이다.」가 참이어야 한다.
 $\therefore a \leq -1$
또, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건이므로
「 $x \geq b$ 이면 $x \geq 3$ 이다.」가 참이어야 한다.
 $\therefore b \geq 3$
따라서, a 의 최댓값은 -1 , b 의 최솟값은 3 이므로
구하는 값은 $-1 + 3 = 2$ 이다.

8. $a \leq x \leq 6$ 은 $2 \leq x \leq 5$ 이기 위한 필요조건이고, $b \leq x \leq 4$ 은 $2 \leq x \leq 5$ 이기 위한 충분조건일 때 a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\{x|2 \leq x \leq 5\} \subset \{x|a \leq x \leq 6\}$
 $\therefore a \leq 2$
 $\{x|b \leq x \leq 4\} \subset \{x|2 \leq x \leq 5\}$
 $\therefore 2 \leq b$
 a 의 최댓값은 2, b 의 최솟값은 2
 $\therefore 2 + 2 = 4$

9. $p : -1 \leq x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$, $q : x \geq a$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 q 는 p 이기 위한 필요조건이므로 $P \subset Q$ 이다.
 $\therefore a \leq -1$
따라서 a 의 최댓값은 -1 이다.

10. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B) \cup (B - A) = U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

- ① $A = B$
- ② $B \subset A$
- ③ $A \subset B$
- ④ $A \cap B = \emptyset$
- ⑤ $A^C = B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B 의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.
그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A 와 B 의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.
따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

11. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ a ^2 = a^2$	㉡ $ ab \geq ab$
㉢ $ a + b \geq a - b $	㉣ $ a - b \geq a - b $

- ① ㉠, ㉡
- ② ㉡, ㉢
- ③ ㉠, ㉡, ㉢
- ④ ㉠, ㉢, ㉣
- ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$$\begin{aligned} \text{㉣ } & (|a| - |b|)^2 - |a - b|^2 \\ &= |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 - (a - b)^2 \\ &= 2(ab - |ab|) \leq 0 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

12. 다음 부등식에 관한 설명 중에서 옳은 것은? (단, a, b, x, y 는 실수임)

- ① $a \geq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$
- ② $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$
- ③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ (단, $ax = by$ 일 때, 등호 성립)
- ④ $a^2 + b^2 \geq ab$ (단, $a = b$ 일 때, 등호 성립)
- ⑤ 두 양수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ (단, $a = b$ 일 때, 등호 성립)

해설

- ②의 반례 : a, b 가 음수인 경우
- ③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$
 $= (a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2)$
 $- (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2)$
 $= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$
 $= (ay - bx)^2 \geq 0$ 단, 등호는 $ay = bx$ 일때 성립
- ④ $a^2 + b^2 - ab$
 $= \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$
등호는 $a = b = 0$ 일때 성립
- ⑤ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$
($\therefore$ 산술평균 $\geq$ 기하평균 $\geq$ 조화평균)

13. 다음은 $x > 0$ 일 때, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 임을 증명한 것이다.

$x > 0$ 이면 $\langle \rangle > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $\frac{1}{2}\langle \rangle \geq \langle \rangle$ 이므로 $\frac{1}{2}\langle \rangle \geq 1$ 이다. 즉, 등호가 성립하는 것은 $x = \langle \rangle (x > 0)$ 일 때 이므로 $\therefore x = 1$

위의 증명 과정에서 $\langle \rangle$, $\langle \rangle$, $\langle \rangle$ 에 알맞은 것을 차례로 적으면?

- ① $x, \frac{1}{x}, x + \frac{1}{x}$
- ② $x, \frac{1}{x}, 2\left(x + \frac{1}{x}\right)$
- ③ $x, x + \frac{1}{x}, 2\left(x + \frac{1}{x}\right)$
- ④ $\frac{1}{x}, x + \frac{1}{x}, \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$
- ⑤ $\frac{1}{x}, 2\left(x + \frac{1}{x}\right), \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$

해설

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$$

14. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(2a + b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$$(2a + b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) = 16 + 1 + \frac{8b}{a} + \frac{2a}{b}$$

$$a > 0, b > 0 \text{ 이므로 } \frac{8b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{8b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 8$$

$$\therefore \text{최솟값은 } 17 + 8 = 25$$

15. 양의 실수 x, y 에 대하여 $2x+y=1$ 일 때, $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$ 의 최솟값을 구하면?

- ① $2\sqrt{6}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{6}$ ⑤ $6\sqrt{6}$

해설

$$x > 0, y > 0 \text{ 이므로 } 2x + y = 1 \geq 2\sqrt{2xy}$$

$$\frac{1}{2} \geq \sqrt{2xy}$$

$$\therefore \frac{1}{8} \geq xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \geq 2\sqrt{\frac{3}{xy}} \text{ 이므로}$$

$$\frac{3}{xy} \text{이 최소가 되려면 } xy \text{가 최대가 되어야 하므로 } xy = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{3}{y} \geq 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6}$$

16. 길이가 16m인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① 8 m^2 ② 16 m^2 ③ 25 m^2 ④ 36 m^2 ⑤ 64 m^2

해설

가로를 x , 세로를 y 라 하자.

$$2(x+y) = 16 \quad x+y = 8$$

산술기하평균을 사용하면,

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$4 \geq \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow 16 \geq xy$$

$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\text{m}^2)$

17. 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라고 하자. $P - (Q \cup R) = (P \cup Q) - R$ 가 성립할 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은?
- ① $p \rightarrow q$

② $r \rightarrow q$

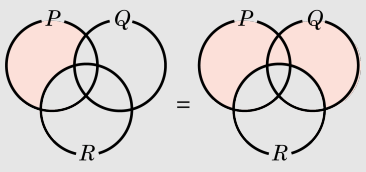
③ $q \rightarrow p$

④ $p \rightarrow r$

⑤ $q \rightarrow r$

해설

$P - (Q \cup R) = (P \cup Q) - R$ 벤다이어그램으로 나타내면



$Q \cup R = R \leftrightarrow Q \subset R \therefore q \rightarrow r$ 가 참이다.

18. 두 조건 $p: |x-k| \leq 1$, $q: -7 \leq x \leq 3$ 에서 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, k 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

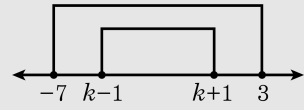
① -12 ② -4 ③ 8 ④ 4 ⑤ 12

해설

$$p: |x-k| \leq 1 \text{에서 } -1 \leq x-k \leq 1$$

$$\therefore k-1 \leq x \leq k+1 \cdots \text{㉠}$$

$p \rightarrow q$ 가 참이면 ㉠이 $q: -7 \leq x \leq 3$ 에 포함되어야 한다.
수직선에 나타내면



$$k-1 \geq -7 \therefore k \geq -6$$

$$k+1 \leq 3 \therefore k \leq 2$$

따라서 k 의 최솟값은 -6, k 의 최댓값은 2 이다.

$$\therefore -6 + 2 = -4$$

19. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$

② $P - Q = \emptyset$

③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \emptyset$

⑤ $P \cap Q = P$

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \emptyset$

20. 다음은 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 못한 부분은?

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{4}{y}} \cdots \textcircled{㉠}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{xy}}$$
$$\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \cdots \textcircled{㉡}$$
$$\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2 \cdot 4 = 8 \cdots \textcircled{㉢}$$

따라서 $x+y$ 의 최솟값은 8이다.㉣

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉣
- ⑤ 틀린 곳이 없다.

해설

㉠에서 등호가 성립하는 경우는 $\frac{1}{x} = \frac{4}{y}$
즉 $y = 4x$ 일 때이고,
㉡에서 등호가 성립하는 경우는
 $x = y$ 일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서 $x+y$ 의 최솟값은 8이 될 수 없다.