

1. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} & (1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i) \\ &= (x^2 - x - 2) + (x^2 - 3x + 2)i \end{aligned}$$

순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분) $\neq 0$ 이어야 하므로
 $x^2 - x - 2 = 0$, $x^2 - 3x + 2 \neq 0$

(i) $x^2 - x - 2 = 0$ 에서 $(x+1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$

(ii) $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2) \neq 0$
 $\therefore x \neq 1$ 또는 $x \neq 2$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $x = -1$

2. $\frac{5}{1+2i} = x+yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: $x+y = -1$

해설

$$\frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5(1-2i)}{5} = 1-2i$$

$$1-2i = x+yi$$

$$x = 1, y = -2, x+y = -1$$

3. $(1+i)^{10}$ 의 값은?

- ① $10-i$ ② $4i$ ③ $8i$ ④ $16i$ ⑤ $32i$

해설

$$\begin{aligned}(1+i)^{10} &= \{(1+i)^2\}^5 = (1+2i+i^2)^5 \\ &= (2i)^5 = 2^5 \cdot i^5 = 32i\end{aligned}$$

4. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y 를 구할 때, x^2+y^2 의 값을 구하시오.

$$(1 - 2xi)(2 - yi) = 6 - 2i \quad (\text{단, } x > 0)$$

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$(2 - 2xy) - (4x + y)i = 6 - 2i$$

$$2 - 2xy = 6, \quad 4x + y = 2$$

연립하여 x 에 대해 정리하면

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$(x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 1(x > 0), \quad y = -2$$

5. α, β 의 켈레복소수를 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 라고 할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $\overline{\alpha - \beta i} = \bar{\alpha} - \bar{\beta} i$
 ㉡ $\overline{\alpha + \beta - 1} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + 1$
 ㉢ $\alpha \bar{\alpha}^2 + \alpha^2 \bar{\alpha}$ 는 실수이다.
 ㉣ $\alpha \bar{\beta} = 1$ 일 때, $\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} + \frac{\bar{\beta}}{\beta}$ 는 실수이다.

- ① ㉠ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉣
 ④ ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

$\alpha = a + bi, \beta = c + di, \bar{\alpha} = a - bi, \bar{\beta} = c - di$ 라 하면

$$\begin{aligned} \text{㉠ } \overline{\alpha - \beta i} &= \overline{a + bi - (c + di)i} \\ &= \overline{a + bi - ci - di^2} \\ &= \overline{a + d - (b - c)i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} - \bar{\beta} i &= (a - bi) - (c - di)i \\ &= a - bi - ci + di^2 \\ &= a - d - (b + c)i \text{ 이므로 ㉠은 거짓} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{㉡ } \overline{\alpha + \beta - 1} &= \overline{a + bi + c + di - 1} \\ &= \overline{(a + c - 1) + (b + d)i} \\ &= (a + c - 1) - (b + d)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} + \bar{\beta} + 1 &= a - bi + c - di + 1 \\ &= (a + c + 1) - (b + d)i \text{ 이므로} \end{aligned}$$

㉡은 거짓

6. 복소수 $w = 2 - i$ 에 대하여 $\frac{w}{w+1} + \frac{\bar{w}}{\bar{w}+1}$ 의 값은? (단, \bar{w} 는 w 의 켈레복소수이다.)

- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

해설

$$\begin{aligned} \bar{w} &= 2 + i \\ \frac{w}{w+1} + \frac{\bar{w}}{\bar{w}+1} &= \frac{2-i}{3-i} + \frac{2+i}{3+i} \\ &= \frac{(2-i)(3+i) + (2+i)(3-i)}{(3-i)(3+i)} \\ &= \frac{14}{10} \\ &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} \omega + \bar{\omega} &= 4, \omega\bar{\omega} = 5 \\ \frac{w}{w+1} + \frac{\bar{w}}{\bar{w}+1} &= \frac{2\omega\bar{\omega} + \omega + \bar{\omega}}{\omega\bar{\omega} + \omega + \bar{\omega} + 1} \\ &= \frac{10 + 4}{5 + 4 + 1} \\ &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

7. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답:

▷ 정답: $-3 + 3i$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}} \\ &= \sqrt{3 \cdot (-3)} - \sqrt{(-3) \cdot (-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}} \\ &= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9} \\ &= -\sqrt{9} + \sqrt{-9} \\ &= -3 + 3i \end{aligned}$$

8. 유리수 a, b, c, d 에 대하여 $(\sqrt{2} + i)^4 + a(\sqrt{2} + i)^3 + b(\sqrt{2} + i)^2 + c(\sqrt{2} + i) + d = 0$ 을 만족한다. 이 때, $a - b - c - d$ 의 값은? (단, $i^2 = -1$)

① -7

② 3

③ 1

④ -1

해설

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2} + i)^4 &= -7 + 4\sqrt{2}i, (\sqrt{2} + i)^3 = -\sqrt{2} + 5i, \\
 (\sqrt{2} + i)^2 &= 1 + 2\sqrt{2}i \\
 (-7 + 4\sqrt{2}i) + a(-\sqrt{2} + 5i) \\
 + b(1 + 2\sqrt{2}i) + c(\sqrt{2} + i) + d &= 0 \\
 (-7 - \sqrt{2}a + b + \sqrt{2}c + d) \\
 + (4\sqrt{2} + 5a + 2\sqrt{2}b + c)i &= 0 \\
 \therefore (-7 + b + d) + (c - a)\sqrt{2} &= 0, \\
 (5a + c) + (4 + 2b)\sqrt{2} &= 0 \\
 a, b, c, d \text{ 는 유리수이므로 } -7 + b + d &= 0 : \\
 c - a = 0, 5a + c = 0, 4 + 2b &= 0 \\
 \therefore a = 0, b = -2, c = 0, d = 9 \\
 \therefore a - b - c - d &= -7
 \end{aligned}$$

9. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $\frac{1}{2w^3+3w^2+4w} = aw+b$ 를 만족하는 실수 $a+b$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② -2 ③ 2 ④ 1 ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w (허근)라 하고, $w^2+w+1=0$ 에서 양변에 $w-1$ 을 곱하면,

$$w^3-1=0 \quad \therefore w^3=1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2w^3+3w^2+4w} &= \frac{1}{3w^2+4w+1} \\ &= \frac{1}{3(w^2+w+1)+w-1} \\ &= \frac{w-1}{w+2} \\ &= \frac{(w-1)(w+2)}{(w+2)(w+2)} \\ &= \frac{w^2+w-2}{w+2} \\ &= \frac{-3}{\frac{1}{3}w+\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\therefore -\frac{1}{3}w-\frac{2}{3} = aw+b \text{ 에서}$$

a, b 가 실수, w 는 허수이므로

$$a = -\frac{1}{3}, b = -\frac{2}{3} \quad \therefore a+b = -1$$

10. 복소수 $z = x + yi$ (단, x, y 는 실수이고, $i = \sqrt{-1}$)에 대하여 $z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$ 을 만족시키는 점 (x, y) 가 좌표평면 위에서 나타내는 도형을 구하면?

① 두 점

② 네 점

③ 직선

④ 원

⑤ 포물선

해설

$z = x + yi, \bar{z} = x - yi$ 에서

$$0 = z\bar{z} + z + \bar{z}$$

$$= (x + yi)(x - yi) + (x + yi) + (x - yi)$$

$$= x^2 + y^2 + 2x$$

따라서, $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ 인 원을 나타낸다.