

1. 중심이 x 축 위에 있고 두 점 $(-1, 4)$, $(6, 3)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $(x-2)^2 + y^2 = 5$

② $(x+2)^2 + y^2 = 5$

③ $(x-2)^2 + y^2 = 25$

④ $(x+1)^2 + y^2 = 25$

⑤ $(x+2)^2 + y^2 = 25$

해설

원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$,
반지름의 길이를 r 라 하면,
원의 방정식은 $(x-a)^2 + y^2 = r^2 \dots \textcircled{1}$
이 원이 두 점 $(-1, 4)$, $(6, 3)$ 을 지나므로,
 $x = -1$, $y = 4$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면,
 $(-1-a)^2 + 4^2 = r^2$
 $\therefore a^2 + 2a + 17 = r^2 \dots \textcircled{2}$
 $x = 6$, $y = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면,
 $(6-a)^2 + 3^2 = r^2$
 $\therefore a^2 - 12a + 45 = r^2 \dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{2} - \textcircled{3}$ 을 하면, $14a - 28 = 0$, $\therefore a = 2$
 $a = 2$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면, $r^2 = 25$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2 + y^2 = 25$

2. 중심이 (3, 4) 이고 x 축에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$ ② $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$

③ $(x-5)^2 + (y-9)^2 = 15$ ④ $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 8$

⑤ $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 22$

해설

중심이 (3, 4) 이고 x 축에 접하므로
반지름의 길이 r 은 $r = 4$
따라서, 구하는 원의 방정식은
 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$

3. 두 점 $(1, 4)$, $(3, 2)$ 를 지나고, x 축에 접하는 원은 2개가 있다. 이 때, 두 원의 반지름의 합은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

x 축에 접하는 원의 방정식을 표현하면,
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$
 $(1, 4)$, $(3, 2)$ 를 지나므로 각각 대입하면,
 $(1-a)^2 + (4-b)^2 = b^2 \quad \cdots \text{㉠}$
 $(3-a)^2 + (2-b)^2 = b^2 \quad \cdots \text{㉡}$
㉠, ㉡ 를 연립하여 풀면,
 $a = 1, b = 2$ 또는 $a = 9, b = 10$
 $\therefore$ 두 원의 반지름의 합은 $10 + 2 = 12$

4. 점 $(-4, 2)$ 를 지나고 x 축, y 축에 모두 접하는 원은 2 개가 있다. 이때, 두 원 중 큰 원의 넓이는?

① 25π ② 50π ③ 75π ④ 100π ⑤ 125π

해설

제 2 사분면의 점 $(-4, 2)$ 를 지나고
 x 축, y 축에 접하는 원의 방정식은
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 (r > 0)$
 $(-4+r)^2 + (2-r)^2 = r^2$
 $16 - 8r + r^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2, (r-2)(r-10) = 0$
 $\therefore r = 2$ 또는 $r = 10$
따라서 큰 원의 반지름의 길이가 10 이므로
넓이는 $\pi \cdot 10^2 = 100\pi$

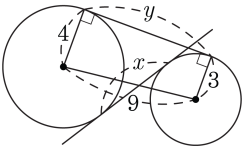
5. 점 A(7, 7)과 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = 4$ ② $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 1$
③ $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 1$ ④ $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 1$
⑤ $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 1$

해설

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 위의 점을 $P(a, b)$ 라 하면
A(7, 7), $P(a, b)$ 의 중점의 좌표 $M(x, y)$ 는
 $M\left(\frac{a+7}{2}, \frac{b+7}{2}\right)$ 이다.
 $\therefore x = \frac{a+7}{2}, y = \frac{b+7}{2}$
 $\therefore a = 2x-7, b = 2y-7$
이 때, 점 P 는 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$
위의 점이므로 $(a-1)^2 + (b-1)^2 = 4$ 가 성립한다.
 $(2x-8)^2 + (2y-8)^2 = 4$
 $\therefore (x-4)^2 + (y-4)^2 = 1$

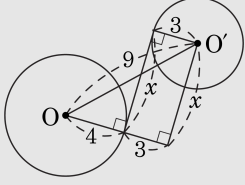
6. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 3, 4 이고 중심거리가 9 인 두 원의 공통내접선의 길이와 공통외접선의 길이를 각각 x , y 라 할 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.



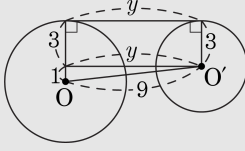
▶ 답 :

▷ 정답 : 112

해설



$$9^2 = (4 + 3)^2 + x^2 \quad \therefore x^2 = 9^2 - 7^2$$



$$9^2 = y^2 + (4 - 3)^2 \quad \therefore y^2 = 9^2 - 1^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2 \cdot 9^2 - 7^2 - 1^2 = 112$$

7. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \quad 3x - 4y + 6 = 0$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$
따라서 , 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선
 $3x - 4y + 6 = 0$ 까지의 거리 d 는
$$d = \frac{|17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5} > 2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.
∴ 교점의 개수 : 0개

8. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1 , 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2 , 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3 , 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.

$\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} = 14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

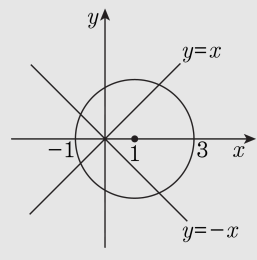
$$\begin{aligned} & C_1(r, r), C_2\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right), \\ & C_3\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right), C_4\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right) \text{ 이므로} \\ & \overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2} \\ & \quad + \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r \\ &= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10} \\ &\therefore r = 16 \end{aligned}$$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ 의 해의 개수를 구하면?

- ① 없다. ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\therefore x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x$$



$$\therefore (x-1)^2 + y^2 = 2^2$$

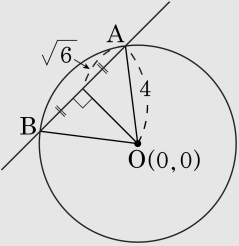
즉, 해는 4 개이다.

10. 직선 $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 = 16$ 과 만나서 생기는 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 양수 k 의 값은?

- ① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로,



$$\overline{HA} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \sqrt{6}$$

이 때, $\triangle AHO$ 가 직각삼각형이므로

$$\overline{OH} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$$

따라서 원의 중심 $O(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + k$

즉, $x - y + k = 0$ 에 이르는 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}, |k| = 2\sqrt{5}$$

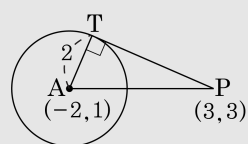
$$\therefore k = 2\sqrt{5} (\because k > 0)$$

11. 점 (3, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 에 그은 접선의 길이는?

- ① 5 ② $\sqrt{26}$ ③ 6 ④ $\sqrt{37}$ ⑤ 7

해설

준식에서 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$ 이므로
중심이 (-2, 1) 반지름의 길이가 2 인 원이다.



$$\begin{aligned}\overline{PT}^2 &= \overline{PA}^2 - \overline{AT}^2 \\ &= (3 + 2)^2 + (3 - 1)^2 - 2^2 \\ &= 25\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PT} = 5$$

12. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 점 $P(x_1, y_1)$ 에서 접하는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, P 는 제1 사분면 위의 점이고, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x_1 y_1 > 0$ 이고 넓이는 $\frac{25}{2x_1 y_1}$ 이므로

$x_1 y_1$ 이 최대가 될 때 넓이는 최소가 된다.

그런데 $x_1^2 + y_1^2 = 5$ 이고 $x_1 > 0, y_1 > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1 y_1, x_1 y_1 \leq \frac{5}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{x_1 y_1} \geq \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{25}{2x_1 y_1} \geq \frac{25}{2} \cdot \frac{2}{5} = 5 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최솟값은 5

13. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A,B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

제1사분면에서의 원 위의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x + y_1y = 8 \cdots \cdots \textcircled{1}$ (단, $x_1 > 0, y_1 > 0$)

한편, 두 점 A,B 는 각각 접선 $\textcircled{1}$ 과 x 축, y 축의 교점이므로

$$A\left(\frac{8}{x_1}, 0\right), B\left(0, \frac{8}{y_1}\right)$$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x_1} \cdot \frac{8}{y_1} = \frac{32}{x_1y_1}$$

이 때, (x_1, y_1) 이 원 $x^2 + y^2 = 8$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 8 \text{ 이고}$$

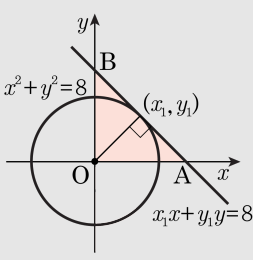
$x_1 > 0, y_1 > 0$ 에서

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1y_1, x_1y_1 \leq 4$$

$$\therefore \frac{1}{x_1y_1} \geq \frac{1}{4} \leftarrow \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\therefore S = \frac{32}{x_1y_1} \geq 32 \cdot \frac{1}{4} = 8 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.



14. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 밖의 점 P(3, 4)에서 이 원에 두 개의 접선을 그을 때 그 접점을 Q, R이라고 하자. 직선 QR의 방정식을 $ax + by = 1$ 라 할 때 $a + b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

접점의 좌표를 $Q(x_1, y_1)$, $R(x_2, y_2)$ 라고 하면
Q, R에서의 접선의 방정식은 각각
 $x_1x + y_1y = 1$, $x_2x + y_2y = 1$ 이고,
두 접선은 모두 점 P(3, 4)를 지나므로
 $3x_1 + 4y_1 = 1$, $3x_2 + 4y_2 = 1$
여기서 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 는
방정식 $3x + 4y = 1$ 의 근이며, 이 두 접점을
지나는 직선은 오직 하나뿐이므로
직선 QR의 방정식은 $3x + 4y = 1$ 이다.
 $\therefore a = 3, b = 4 \quad \therefore a + b = 7$

15. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2 + y^2 = 4 \text{ , } (x - 5)^2 + y^2 = 25$

- ① $y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)
- ② $y = \pm \frac{4}{5}x \pm 2$ (복부호 동순)
- ③ $y = \pm \frac{5}{6}x \pm \frac{7}{5}$ (복부호 동순)
- ④ $y = \pm \frac{9}{10}x \pm \frac{11}{8}$ (복부호 동순)
- ⑤ $y = \pm \frac{10}{11}x \pm \frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설

$x^2 + y^2 = 4 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

$(x - 5)^2 + y^2 = 25 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$

공통접선의 방정식을 $y = ax + b$

$\cdots \cdots \textcircled{㉢}$ 로 놓으면

원 ㉠과 직선㉢, 즉 $ax - y + b = 0$ 이
접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$$

$\therefore |b| = 2\sqrt{a^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{㉣}$

또, 원 ㉡도 직선 ㉢, 즉 $ax - y + b = 0$ 과 접하므로

$$\frac{|5a + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5$$

$\therefore |5a + b| = 5\sqrt{a^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{㉤}$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 ㉣ $\div$ ㉤을 하면

$$\frac{|5a + b|}{|b|} = \frac{5}{2}$$

$$2|5a + b| = 5|b|, 2(5a + b) = \pm 5b$$

$$\therefore b = -\frac{10}{7}a \text{ 또는 } b = \frac{10}{3}a$$

(i) $b = -\frac{10}{7}a$ 일 때, ㉣에서

$$\frac{10}{7}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 7\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$24a^2 + 49 = 0$$

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(ii) $b = \frac{10}{3}a$ 일 때, ㉣에서

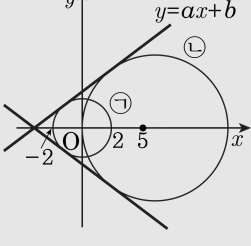
$$\frac{10}{3}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2 = 9, a^2 = \frac{9}{16}$

$$\therefore a = \pm \frac{3}{4}, b = \pm \frac{5}{2} \text{ (복부호 동순)}$$

(i), (ii)로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$$y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2} \text{ (복부호 동순)}$$



16. 두 점 A(1, 0), B(4, 0)으로부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

주어진 조건에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$\overline{AP} = 2\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면

$(x-1)^2 + y^2 = 4\{(x-4)^2 + y^2\}$

$\therefore (x-5)^2 + y^2 = 4$

따라서 점 P는 중심이 (5, 0)이고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의

발을

H라 하면 $\overline{PH}$ 의 길이가

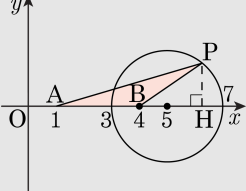
반지름의 길이와 같을 때 삼각형 PAB

의 넓이가

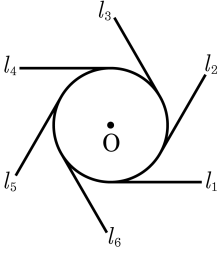
최대가 되므로 $\Delta PAB = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{PH} \leq$

$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은 3이다.



17. 형중이는 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계도를 그리고 있다. $l_1, l_2, \dots, l_6$ 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. 두 접선 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터 원의 중심까지의 거리는 반지름의 몇 배인가?



- ① 2 배
 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 배
 ③ $3\sqrt{5}$ 배
- ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배
 ⑤ 5 배

해설

그림에서 $l_1 : y = -r$ 라 놓으면

$$l_2 : y = \sqrt{3}x + k = \sqrt{3}x - 2r$$

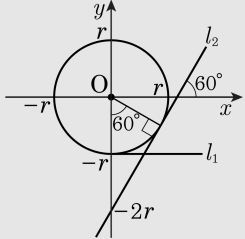
l_2 의 x 절편은 $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ 이고

원의 반지름이 $\cos 30^\circ = \frac{r}{x}$ 이므로

$$x = r \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

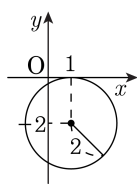
따라서, 구하는 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터

원의 중심까지의 거리는 반지름의 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배이다.

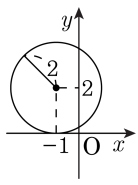


18. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ 의 그래프로 옳은 것은?

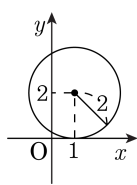
①



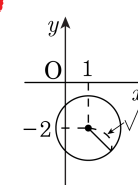
②



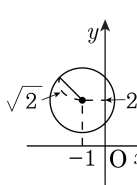
③



④



⑤

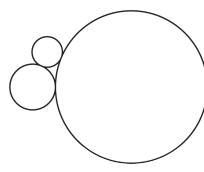


해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$$

$\therefore$ 중심은 $(1, -2)$ 이고, 반지름은 $\sqrt{2}$

19. 반지름이 각각 2, 3, 10인 세 원이 그림과 같이
둘 짝 서로 외접하고 있다. 이 때, 세 접점을 지
나는 원의 넓이를 구하면?

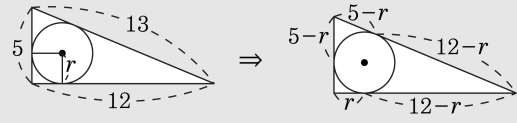


- ① $\frac{8}{3}\pi$ ② 4π ③ $\frac{9}{2}\pi$
 ④ 6π ⑤ $\frac{20}{3}\pi$

해설

중심사이거리가 각각 12, 5, 13 이다. 세 원의 중심을 이은 삼각
형은 $12^2 + 5^2 = 13^2$ 이므로 직각삼각형이다.

$\therefore$ 세 점을 지나는 원은 직각삼각형의 내접원이다.



$$\Rightarrow (5-r) + (12-r) = 13$$

$$\Rightarrow r = 2$$

$$\therefore \text{원의 넓이는 } \pi \times 2^2 = 4\pi$$

20. 두 원 $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ 의 교점을 지나는 원의 넓이의 최솟값은?

- ① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

해설

두 원 $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ 의 교점을 지나는 원의 넓이가 최소가 되는 경우는 그 원이 주어진 두 원의 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원일 때이다.

이 때, 주어진 두 원의 공통현의 방정식은

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2y - (x^2 + y^2 + 2x - 4) &= 0 \\ -2y - 2x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore y = -x + 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 원의 교점은 공통현 $\textcircled{1}$ 과 원 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 의 교점과 같으므로 $\textcircled{1}$ 을 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 에 대입하면

$$x^2 + (-x + 2)^2 - 2(-x + 2) = 0$$

$$2x^2 - 2x = 0,$$

$$2x(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

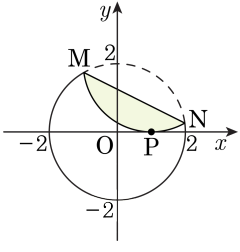
따라서, 두 교점은 $(0, 2), (1, 1)$ 이고, 이 두 점이 넓이가 최소인 원의 지름의 양 끝점이므로 이 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \sqrt{(1-0)^2 + (1-2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

그러므로 구하는 원의 넓이의 최솟값은

$$\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

21. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 현 MN 에서 접었을 때, 호 MN 이 점 P(1, 0) 에서 x 축에 접한다면 직선 MN 의 방정식을 $ax + by + c = 0$ 이라 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 그림의 원에서 $x^2 + y^2 = 4 \cdots \textcircled{1}$
 호 MN 을 포함하는 원은 x 축에 접하므로
 $x = 1$ 위에 중심이 있고, 그 반지름은 2 이다.
 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \cdots \textcircled{2}$
 직선 MN 은 두 원 ①, ②의
 공통현의 방정식이므로 ① - ②을 하면,
 $x^2 + y^2 - 4 - \{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 4\} = 0$
 $\therefore 2x + 4y = 5$
 $\therefore a = 2, b = 4, c = -5$
 $\therefore a + b + c = 1$

22. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2my + m^2 - 7 = 0$, $x^2 + y^2 - 2mx + 2y + m^2 - 9 = 0$ 가 직교할 때 m 값을 구하면?

① $-4, 2$

② $-4, -2$

③ $4, -2$

④ $2, \sqrt{2}$

⑤ $-2, \sqrt{2}$

해설

두 원의 교점에서 접선이 수직이므로

$$(x-1)^2 + (y+m)^2 = 8$$

$$(x-m)^2 + (y+1)^2 = 10$$

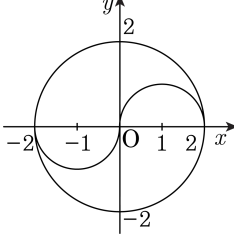
두 원의 교점과 각 원의 중심이 직각삼각형을

이루므로

$$(m-1)^2 + (m-1)^2 = 18, (m-1)^2 = 9, m-1 = \pm 3$$

$$m = 4, -2$$

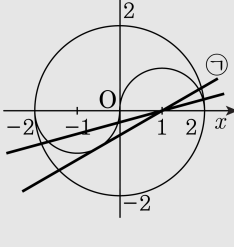
23. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 원과 반원으로 이루어진 태극문양이 있다. 태극문양과 직선 $y = a(x - 1)$ 이 서로 다른 다섯 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?



- ① $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{3}$
 ② $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$
- ③ $0 < a < \frac{2}{3}$
 ④ $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{3}$
- ⑤ $0 < a < \frac{\sqrt{6}}{3}$

해설

직선 $y = a(x - 1)$ 의 그래프는 실수 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 0)$ 을 지나므로 직선이 태극문양과 서로 다른 다섯 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같이 x 축과 직선 ㉠사이를 움직이는 직선일 때이다.



이때, 직선의 기울기는 양수이므로 $a > 0$
 직선과 제3사분면의 반원이 접하는 경우,
 점 $(-1, 0)$ 과 직선 $y = a(x - 1)$,
 즉 $ax - y - a = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|-a - 0 - a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1, |2a| = \sqrt{a^2 + 1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4a^2 = a^2 + 1, a^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서, 직선과 태극문양이 서로 다른 다섯 점에서 만나기 위한 실수 a 의 값의 범위는

$$0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3} \text{이다.}$$

24. 중심이 C(4, 3) 이고 반지름의 길이가 2인 원이 있다. 원점에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q 라 할 때, 직선 PQ 의 방정식을 구하면?

- ① $4x + 3y = 25$

② $4x + 3y = 21$

③ $3x + 4y = 16$
- ④ $3x + 4y = 25$

⑤ $3x + 4y = 21$

해설

구하고자 하는 직선 $y = ax + b$ 는 원점과 원의 중심인 (4, 3) 을 잇는 직선에 대해서 수직이므로,

$$a \times \frac{3}{4} = -1$$

$$\therefore a = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore y = -\frac{4}{3}x + b, 4x + 3y - 3b = 0$$

직선 OC와 직선 PQ의 교점을 R 이라 하면

$\triangle OCQ$ 와 $\triangle OQR$ 은 서로 닮음이므로,

$$5 : \sqrt{21} = \sqrt{21} : x$$

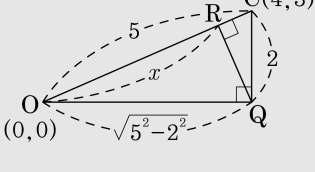
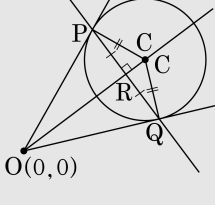
$$\therefore x = \frac{21}{5}$$

직선 PQ와 원점간의 거리가 $\frac{21}{5}$ 이므로

$$\frac{|-3b|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{21}{5}$$

$$|3b| = 21, \ b > 0 \text{ 이므로 } 3b = 21$$

$$\therefore 4x + 3y = 21$$



25. 방정식 $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 4my + 4m^2 - 9 = 0$ 이 나타내는 원 중에서 반지름의 길이가 최소인 원을 C 라 할 때, C 위의 점 P 에서 점 Q(4, 1) 에 이르는 거리의 최솟값을 구하면?(단, m 은 실수)

- ① $\sqrt{15} - 1$
- ② $\sqrt{15} - 2$
- ③ $\sqrt{15} - 3$
- ④ $\sqrt{17} - 2$
- ⑤ $\sqrt{17} - 3$

해설

원의 방정식을 정리하면,
 $\{x + (m-1)\}^2 + (y-2m)^2 = (m-1)^2 + 9$
 $\therefore m=1$ 일때 반지름이 3으로써 최소이다.
 $\Rightarrow \overline{PQ}$ 의 최솟값은 Q 에서 원 중심까지
거리에서 반지름을 뺀 값과 같다.
 $\therefore \overline{PQ}$ 의
최솟값은 $\sqrt{4^2 + 1^2} - 3$
 $= \sqrt{17} - 3$