1. 다음 집합 중에서 조건제시법을 원소나열법으로, 원소나열법을 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은? (정답 2 개)

① $A = \{x \mid x$는 홀수$\} = \{1, 3, 6, \cdots\}$

② $A = \{x \mid x$는 10의 약수$\} = \{1, 2, 4, 8 \cdots\}$

③ $\{x \mid x$는 30보다 작은 소수$\} = \{2, 3, 5, 7, \cdots, 23, 29\}$

④ $\{3, 6, 9, 12\} = \{x \mid x$는 10 이하의 3 의 배수$\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7, \cdots, 99\} = \{x \mid x$는 100 이하의 홀수$\}$

해설

① $\{1,\ 3,\ 5 \cdots\}$
② $\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$
④ $\{x \mid x$는 12 이하의 3의 배수$\}$

2. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\varnothing)=1$

② $X=\{1,\ 2\}$ 이면 $n(X)=3$

③ $n\left(\{x \mid x\text{는 }5\text{의 약수}\}\right)=5$

④ $A=\{x \mid x\text{는 }1\text{보다 작은 자연수}\}$, $B=\{1,\ 3,\ 7\}$ 일 때, $n(A)+n(B)=3$

⑤ $A=\{x \mid 6\times x=24,\ x\text{는 홀수}\}$ 일 때, $n(A)=1$

해설

① $n(\varnothing)=0$
② $X=\{1,\ 2\}$ 에서 $n(X)=2$
③ $n\left(\{x \mid x\text{는 }5\text{의 약수}\}\right)=n\left(\{1,\ 5\}\right)=2$
⑤ $A=\{x \mid 6\times x=24,\ x\text{는 홀수}\}$ 일 때, $n(A)=0$

3. $A = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$, $B = \{x \mid x$는 10 이하의 짝수 $\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $A \subset B$　　② $10 \in B$　　③ $\varnothing \subset A$

④ $2 \subset B$　　⑤ $7 \in B$

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$,
$B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$
① $B \subset A$
④ $2 \in B$
⑤ $7 \notin B$

4. 다음 중 $A = \{x \mid x$는 10 이하의 소수$\}$ 의 부분집합이 아닌 것은?

① $\varnothing$

② $\{2\}$

③ $\{x \mid x$는 5 이하의 홀수$\}$

④ $\{5,\ 7\}$

⑤ $\{x \mid 2 < x < 8$인 홀수$\}$

해설

$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

③ $\{1,\ 3,\ 5\} \not\subset A$

⑤ $\{3,\ 5,\ 7\} \subset A$

5. 두 집합 $A = \{6,\ a,\ 1,\ b,\ 3\}$, $B = \{8,\ c,\ 1,\ d,\ 5\}$ 가 서로 같을 때, $(a+b)-(c+d)$ 의 값으로 옳은 것은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$A = B$ 이므로
$\{6,\ a,\ 1,\ b,\ 3\} = \{8,\ c,\ 1,\ d,\ 5\}$
이 중 1 은 공통이므로 제외하면
$a = 8,\ b = 5$ 또는 $a = 5,\ b = 8$
따라서 $a + b = 13$
$c = 3,\ d = 6$ 또는 $c = 6,\ d = 3$
따라서 $c + d = 9$
$\therefore (a+b)-(c+d) = 4$

6. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 4\}$ 의 부분집합 중 원소 2 또는 4 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

원소 2 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{3-1} = 4$ (개)
원소 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{3-1} = 4$ (개)
원소 2, 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{3-2} = 2$ (개)
원소 2 또는 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$4 + 4 - 2 = 6$ (개)

7. 집합 B 와 서로소인 것을 <u>모두</u> 고르면?

보기

㉠ $A-B$　　㉡ $A^c \cap B^c$　　㉢ $A-(A-B)$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 집합 A 에서 B 와 공통되는 원소를 모두 제거했기 때문에 $A-B$ 는 B 와 서로소 관계에 있다.
㉡ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이므로 원소들은 집합 A 와 B 에 공통되는 원소가 없다.
따라서 서로소 관계가 된다.

8. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cup B = B \cup A$ ② $A \cup \varnothing = A$

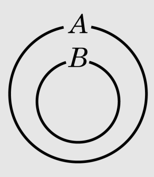
③ $(A \cap B) \subset A$ ④ $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$

⑤ $B \subset A$ 이면 $A \cap B = A$

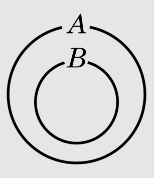
해설

③ $(A \cap B) \subset A$,$(A \cap B) \subset B$

④ $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$



⑤ $B \subset A$ 이면 $A \cap B = B$



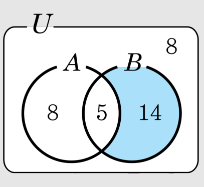
9. 학생 35 명 중에서 제주도에 가 본 학생이 13 명, 경주에 가 본 학생이 19 명, 두 곳 모두 가 본적이 없는 학생이 8 명일 때, 경주에만 가 본 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 명

▷ 정답 : 14 명

해설

전체 학생을 U, 제주도에 가 본 학생을 A, 경주에 가 본 학생을 B라 할 때, 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

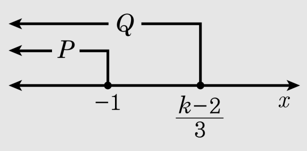


따라서 경주에만 가 본 학생은 14 명이다.

10. 명제 '$x \le -1$ 이면 $3x+2 \le k$ 이다.' 가 참일 때, 다음 중 상수 k 의 값으로 옳은 것은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설



$p : x \le -1,\ q : 3x+2 \le k$ 라 하고, 조건 $p,\ q$ 를 만족하는 집합을 각각 $P,\ Q$ 라 할 때 명제 $p \to q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 이다.

$-1 \le \dfrac{k-2}{3},\ \ -3 \le k-2$

$\therefore\ k \ge -1$

11. 실수 x에 대하여 다음 명제가 참일 때, a의 최솟값을 구하여라.

$x > a$ 이면 $\lvert x-2 \rvert > 4$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 명제가 참이므로

대우 '$\lvert x-2 \rvert \le 4$ 이면 $x \le a$ 이다.' 가 참이다.

$\lvert x-2 \rvert \le 4$ 에서

$-4 \le x-2 \le 4$, $-2 \le x \le 6$ 이므로

$\therefore\ a \ge 6$

따라서 a 의 최솟값은 6 이다.

12. $x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3$ 이기 위한 필요조건이 $x \le a$ 이고, 충분조건이 $x \le b$ 일 때, a 의 최솟값을 m , b 의 최댓값을 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

문제에서 주어진 조건에 의하여 $\{x \mid x \le b\} \subset \{x \mid x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3\} \subset \{x \mid x \le a\}$ 가 되어야 하므로

$\therefore a \ge 3,\ b \le -2$

따라서 a 의 최솟값은 3, b 의 최댓값은 -2 이다.

$\therefore\ m + M = 3 + (-2) = 1$

13. 두 조건 $p,\ q$ 를 만족하는 집합을 각각 $P,\ Q$ 라고 하자. 이때, 다음 식을 만족시키는 조건 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

$$\{(P\cap Q)\cup(P\cap Q^c)\}\cap Q=P$$

▶ 답: ______ 조건

▷ 정답: 충분조건

해설

$\{(P\cap Q)\cup(P\cap Q^c)\}\cap Q=P$
$\{P\cap(Q\cup Q^c)\}\cap Q=P$
$(P\cap U)\cap Q=P$
$P\cap Q=P$
$P\subset Q$
$\therefore\ p\Rightarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

14. 다음 ㉮, ㉯에 알맞은 것끼리 짝지어진 것은?

> 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 r이기 위한 충분조건, q는 r이기 위한 충분조건, s는 r이기 위한 필요조건, q는 s이기 위한 필요조건일 때, s는 p이기 위한 (㉮) 조건이며 p는 q이기 위한 (㉯) 조건이다.

① 필요, 필요 ② 필요, 충분

③ 충분, 필요 ④ 충분, 충분

⑤ 필요충분, 충분

해설

네 조건 p, q, r, s를 만족하는 집합은 각각 P, Q, R, S 라고 하면
$p \subset R$, $Q \subset R$, $S \supset R$, $Q \supset S$, $P \subset R$, $R \subset S$ 이므로 $P \subset S$
따라서 S는 r이기 위한 필요조건이다.
$Q \subset R$, $R \subset S$, $S \subset Q$이므로 $Q = R = S$
$P \subset R$이므로 $P \subset Q$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

15. $a > 0,\ b > 0$일 때, $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0,\ b > 0$이므로 산술기하평균의 관계를 이용하면

$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 1+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+1$

$= \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+2 \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2 = 4$

16. 집합 $U=\{1,2,3,\cdots,99,100\}$ 이다. 다음 U 의 부분집합 A 중 아래 조건 ㉠와 ㉡를 만족시키며 원소의 개수가 가장 적은 것은?

> ㉠ $3 \in A$
>
> ㉡ $m, n \in A$ 이고 $m+n \in U$ 이면, $m+n \in A$ 이다.

① A=$\{1, 2, \cdots, 100\}$
② A=$\{1, 3, 5, \cdots, 99\}$
③ A=$\{3, 4, 5, \cdots, 100\}$
④ A= $\{3, 6, 9, \cdots, 99\}$
⑤ A=$\{3, 9, 15, \cdots, 99\}$

해설

$3 \in A$, $3+3 \in A$, $3+3+3 \in A$, $\cdots$ 이므로 U 의 원소 중 3의 배수가 된다.
따라서 원소의 개수가 가장 적은 A 는 ④

17. 집합 $N = \{n_1, n_2, \cdots, n_7\}$ 의 부분집합 중에서 n_1, n_3, n_7 중 적어도 하나를 포함하는 부분집합의 개수는?

① 3×2^4　② 4×2^4　③ 7×2^4　④ 8×2^4　⑤ 5×2^5

해설

n_1, n_3, n_7 중 적어도 하나를 포함하는 N 의 부분집합은 n_1, n_3, n_7 을 하나도 포함하지 않는 부분집합의 여집합이므로 $2^7 - 2^4 = 2^4\left(2^3 - 1\right) = 7 \times 2^4$

18. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 12\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 5, 6, 9, 12\}$, $A \cap B = \{6, 9, 12\}$ 가 성립할 때 다음 중 집합 B 가 될 수 <u>없는</u> 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $\{6, 8, 9, 12\}$

② $\{6, 8, 9, 10, 12\}$

③ $\{5, 6, 8, 12\}$

④ $\{1, 5, 6, 9\}$

⑤ $\{6, 9, 12\}$

해설

$\{6, 9, 12\} \subset B \subset \{3, 6, 8, 9, 10, 12\}$ 이므로 집합 B 는 원소 6, 9, 12 은 반드시 포함하는 집합이다.
따라서 ③, ④ 은 B 가 될 수 없다.

19. $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ 를 만족하는 자연수 $a_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ 를 원소로 하는 집합 A 와 집합 $B = \left\{a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2,\ a_5^2\right\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{a_1,\ a_4\}$ 이고 $a_1 + a_4 = 10$ 이다. $A \cup B$ 의 원소의 합이 224 일 때, $a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 142

해설

$A \cap B = \{a_1,\ a_4\}$ 에서 a_1, a_4 모두 제곱수이고, 두 수의 합이 10 이므로 $a_1 = 1, a_4 = 9$
9 가 집합 B 의 원소이므로 집합 A 의 원소 중에는 3 이 포함되고, 또 9 가 집합 A 의 원소이므로 집합 B 의 원소 중에는 81 이 포함된다. 또, a_5 가 a_4 보다 크지만 a_5 가 10 보다 커지면 합집합이 224 보다 커지므로 a_5 는 10 이 되고, 차례로 대입하면 $a_3 = 4$ 가 된다.
$A = \{1,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10\}$
$B = \{1,\ 9,\ 16,\ 81,\ 100\}$
$\therefore a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2 = 3 + 4 + 10 + 9 + 16 + 100 = 142$

20. 두 집합 A, B가 다음과 같을 때, $X \cap A = X$, $X \cup (A \cap B) = X$를 만족하는 집합 X의 개수는?

$A = \{x \mid x$는 5 이하의 자연수$\}$, $B = \{3,\ 5,\ 7\}$

① 2개　② 4개　③ 6개　④ 8개　⑤ 10개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$,
$X \cap A = X$이므로 $X \subset A$,
$X \cup (A \cap B) = X$이므로 $(A \cap B) \subset X$
$\{3,\ 5\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$,
따라서 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 원소 3, 5를 반드시 포함하는 집합이므로
$2^{5-2} = 2^3 = 8$이다.

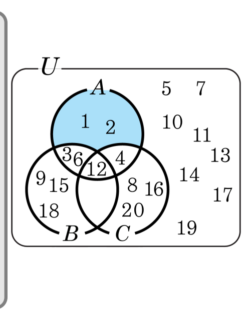
21. 전체집합 $U = \{x|x\text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x|x\text{는 } 12 \text{ 의 약수}\}$,
$B = \{x|x\text{는 } 3 \text{ 의 배수}\}$,
$C = \{x|x\text{는 } 4 \text{ 의 배수}\}$ 에 대하여 $(A-B)\cap C^C$ 을 원소나열법으로 나타내어라.

▶ 답 :

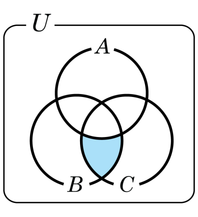
▷ 정답 : $\{1, 2\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 18, 19, 20\}$,
$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $C = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ 이므로 $(A-B)\cap C^C$ 을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.
$\therefore (A-B)\cap C^C = \{1, 2\}$



22. 전체집합 U 에 대하여 세 부분집합 A, B, C 가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 색칠된 부분을 나타내는 집합을 모두 고르면?

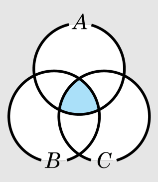


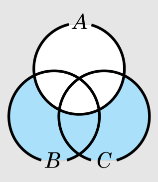
① $A^c \cap B \cap C$　　② $A \cap B \cap C$

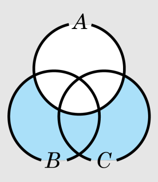
③ $(B \cup C) - A$　　④ $(B \cap C) - A$

⑤ $(B - A) \cup (C - A)$

해설

②


③


⑤


23. 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

① $A \cap B = A$ 이면 $n(A) < n(B)$

② $A \cap B = \varnothing$ 이면 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

③ $A - B = \varnothing$ 이면 $A = B$

④ $A \cup B = B$ 이면 $B - A = \varnothing$

⑤ $A \cap B^c = A$ 이면 $n(A \cap B) = 0$

해설

①$A \cap B = A$ 이면 $n(A) \leq n(B)$

③$A - B = \varnothing$ 이면 $A \subset B$

④$A \cup B = B$ 이면 $A \subset B$ 이므로 $A - B = \varnothing$

24. $0 < a < b,\ a + b = 1$ 일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

$1,\quad \sqrt{a}+\sqrt{b},\quad \sqrt{b}-\sqrt{a},\quad \sqrt{b-a}$

① $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a}$　　② $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

③ $\sqrt{a}+\sqrt{b} < 1$　　④ $\sqrt{b-a} < 1$

⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - 1^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - 1$
$= 2\sqrt{ab} > 0$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 1$

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2 - (\sqrt{b-a})^2 = 1 - b + a$
$= (a+b) - b + a$
$= 2a > 0$

$\therefore\ 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$
$= b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a)$
$= 2\sqrt{ab} - 2a$
$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}) > 0$
$\therefore\ \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

(i), (ii), (iii) 에서 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

25. 무한집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B$ 는 무한집합, A 는 유한집합일 때, 다음 중 반드시 유한집합을 모두 고르면 ? (정답 2 개)

① $A^c \cap B$ ② $(A \cap B)^c$

③ $B \cup X = X$ 일 때, 집합 X ④ $A - B$

⑤ $A^c \cap B^c = \varnothing$ 일 때, B^c

해설

$A \cup B$ 는 무한집합, A 는 유한집합이므로 B 는 무한집합이다.
① $A^c \cap B \rightarrow A^c$ 도 B 도 무한집합이지만, 두 무한집합의 교집합은 무한집합일 수도 유한집합일 수도 있다.
② $(A \cap B)^c \rightarrow A \cap B$ 가 유한집합이므로 $(A \cap B)^c$ 는 무한집합이다.
③ $B \cup X = X$ 일 때, 집합$X \rightarrow B \subset X$ 이므로 무한집합이다.
④ $A - B$ 는 유한집합 차집합 무한집합이므로 항상 유한집합이다.
⑤ $A^c \cap B^c = \varnothing$ 일 때, $(A \cup B)^c = \varnothing$, $A \cup B = U$ 이므로 B^c 는 유한집합이다.