

1. $x^2 \neq 1$ 이고, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 이라 할 때, $f(-x)$ 를 $f(x)$ 를 사용해서 나타내면 무엇인지 고르면?

① $f(x)$

② $-f(x)$

③ $\{f(x)\}^2$

④ $\frac{1}{f(x)}$

⑤ $2f(x)$

해설

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

2. 다음 <보기> 중 서로 같은 함수끼리 짝지어진 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(x) = x - 2, g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

㉡ $f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x^2}$

㉢ 정의역이 $X = \{-1, 1, 2\}$ 일 때,
 $f(x) = x^3, g(x) = 2x^2 + x - 2$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

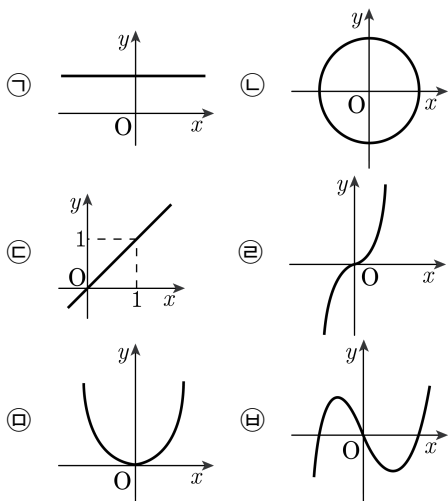
해설

㉠은 $x = 2$ 에서 다른 함수이나

㉡, ㉢는 주어진 모든 정의역에서 같은 함수이다.

3. 다음 중 보기의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?

보기



- ① 상수함수는 ㉠ 과 ㉤ 이다.
- ② 일대일 대응은 ㉢ 과 ㉤ 이다.
- ③ 항등함수는 ㉤ 이다.
- ④ 함수의 그래프가 아닌 것은 ㉡ 뿐이다.
- ⑤ ㉠ 과 ㉢ 의 치역은 같다.

해설

함수의 그래프는 y 축에 평행한 직선을 그을 때, 교점이 오직 하나인 그래프이므로 ㉠, ㉢, ㉣, ㉤, ㉥ 이다.

일대일 대응인 그래프는 함수의 그래프 중 x 축에 평행한 직선을 그을 때 교점이 하나인 그래프이므로 ㉢, ㉣ 이다.

상수함수는 X 의 모든 원소가 Y 의 한 원소에만 대응되는 함수이므로 ㉠ 이다.

항등함수는 X 의 모든 원소가 자기 자신에 대응되는 함수이므로 ㉤ 이다. 따라서 옳은 것은 ④ 이다.

4. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 다음 보기의 X 에서 X 로의 함수 중
항등함수인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(x) = x$

㉡ $g(x) = x^3$

㉢ $h(x) = x^2 + 2$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉢

해설

㉠ $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 이므로
 $f(x)$ 는 항등함수이다.

㉡ $g(-1) = -1, g(0) = 0, g(1) = 1$ 이므로
 $g(x)$ 는 항등함수이다.

㉢ $h(-1) = 3, h(0) = 2, h(1) = 3$ 이므로
 $h(x)$ 는 항등함수가 아니다.

5. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \emptyset$)

① 1 개

② 3 개

③ 4 개

④ 7 개

⑤ 8 개

해설

$f(x) = g(x)$ 일 때, $f(x) - g(x) = h(x)$ 로 놓으면,
($h(x)$ 의 근의 개수) = (집합 X 의 개수)

$$x^3 + 2x - 3x^2 = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = x(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 0, 1, 2$$

x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \emptyset$ 이므로

집합 X 의 개수는 $2^3 - 1 = 7(\text{개})$

6. 0이 아닌 실수에서 정의되는 두 함수 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = 1 - x$ 에 대하여 $h(x) = f(g(x))$ 라고 할 때, $h(x) = \frac{99}{100}$ 를 만족시키는 실수 x 의 값을 구하면?

① 95

② 97

③ 99

④ -97

⑤ -99

해설

$$h(x) = f(g(x)) = f(1-x) = 1 - \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$$

$$h(x) = \frac{99}{100} \text{ 에서}$$

$$\frac{x}{x-1} = \frac{99}{100}$$

따라서 $x = -99$

7. 두 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 3$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 4$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{5}{3}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{4}$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(ax - 3) + 6 = 2ax$$

$$(f \circ g)(1) = 2a = 4$$

$$\therefore a = 2$$

8. 세 함수 f, g, h 가 $(g \circ f)(x) = x$, $(h \circ f)(x) = -x + 3$ 일 때, $k \circ g = h$ 를 만족시키는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

① $k(x) = -x + 1$

② $k(x) = -x + 2$

③ $k(x) = -x + 3$

④ $k(x) = -x + 4$

⑤ $k(x) = -x + 5$

해설

$$k \circ g = h \text{ 이므로 } (k \circ g) \circ f = h \circ f$$

$$k \circ (g \circ f) = h \circ f$$

$$k \circ I = h \circ f (\because g \circ f = I, I \text{는 항등함수})$$

$$\therefore k = h \circ f (\because k \circ I = I \circ k = k)$$

$$\therefore k(x) = (h \circ f)(x) = -x + 3$$

9. 자연수 n 에 대하여 n^2 을 오진법으로 표시했을 때 일의 자리수를 $f(n)$ 이라 하자. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

- ㉠ $f(3) = 4$
 ㉡ $0 \leq f(n) \leq 4$
 ㉢ $f(n) = 2$ 인 자연수 n 은 없다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $f(3)$ 은 3^2 을 오진법으로 표시한 일의 자리수이므로 $3^2 = 5 \times 1 + 4 = 14_{(5)}$ 에서 $f(3) = 4 \quad \therefore$ 참

㉡. 오진법으로 쓸 때 1의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4만이 올 수 있으므로 $0 \leq f(n) \leq 4 \quad \therefore$ 참

㉢. $f(n) = 2$ 이므로

$$n^2 = p_k 5^k + p_{k-1} 5^{k-1} + \cdots + p_2 5^2 + p_1 \cdot 5 + 2$$

($p_i = 0, 1, 2, 3, 4$)의 꼴로 나타낼 수 있다.

즉, n^2 을 5로 나눈 나머지가 2가 된다는 뜻이다.

그런데 정수 l 에 대하여

i) $n = 5l$ 이면 $n^2 = 25l^2$

즉, 5로 나눈 나머지는 0이다.

ii) $n = 5l + 1$ 이면 $n^2 = (5l + 1)^2 = 25l^2 + 10l + 1$

즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.

iii) $n = 5l + 2$ 이면 $n^2 = (5l + 2)^2 = 25l^2 + 20l + 4$

즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.

iv) $n = 5l + 3$ 이면 $n^2 = (5l + 3)^2 = 25l^2 + 30l + 5 + 4$

즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.

v) $n = 5l + 4$ 이면 $n^2 = (5l + 4)^2 = 25l^2 + 40l + 15 + 1$

즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.

모든 자연수 n 은 i), ii), iii), iv), v) 중

어느 한 꼴로 표현이 가능하므로

5로 나눈 나머지가 2가 되는 경우는 없다.

$\therefore$ 참

10. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수)로 나타냈을 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ n 이 홀수이면, $f(n) = 0$ 이다.
㉡ $f(8) < f(24)$ 이다.
㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서

㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수

$$\therefore p = 0$$

$$\text{즉 } f(n) = 0$$

$$\text{㉡ } f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3, f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$$

$$\therefore f(8) = f(24)$$

$$\text{㉢ } f(n) = 3 \text{ 에서 } n = 2^3 \cdot k$$

홀수 k 는 무한집합이므로 무한히 많다.

11. $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이므로

일대일 대응이 되려면

$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.

부등식을 풀면

$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$

$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.

$\therefore a = 7$

12. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g 가 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$ 의 값은?(단, $a \neq 0$)

① 60

② 55

③ 51

④ 48

⑤ 45

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b \\ &= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1 \\ &= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}}\end{aligned}$$

모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{\text{㉠}} = \textcircled{\text{㉡}}$ 이므로

$$2a = 2a^2, \quad 3a = 4ab + 3a, \quad a + b = 2b^2 + 3b + 1$$

위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 0 (\because a \neq 0)$

즉, $f(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned}f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) \\ = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55\end{aligned}$$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$

이다. $f\left(\frac{4-x}{3}\right) = ax + b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

㉠ -36

㉡ -20

㉢ -4

㉣ 20

㉤ 36

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$ 에서 $\frac{x+1}{2} = t$ 라고 하면 $x = 2t - 1$ 이므로

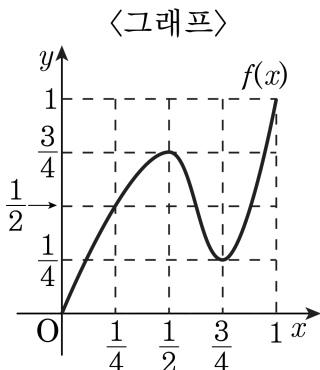
$$f(t) = 6(2t - 1) - 1 = 12t - 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠ 에 t 대신에 $\frac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$$f\left(\frac{4-x}{3}\right) = 12\left(\frac{4-x}{3}\right) - 7 = 16 - 4x - 7 = -4x + 9$$

$$\therefore ab = (-4) \cdot 9 = -36$$

14. $R = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 이라 할 때, R 에서 R 로의 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.(단, $f^n(x) = (f \circ f \circ \dots \circ f)(x) : f$ 개수 n 개)



이 때, $f\left(\frac{1}{4}\right) + f^2\left(\frac{1}{4}\right) + f^3\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값을 구하면?

(단, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$)

① $\frac{99}{2}$

② $\frac{95}{2}$

③ $\frac{93}{2}$

④ $\frac{91}{2}$

⑤ $\frac{89}{2}$

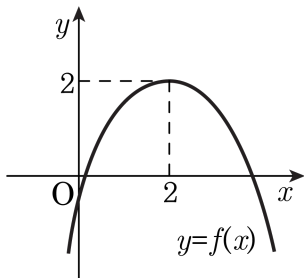
해설

그래프에서 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f^2\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f^3\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$, ... 이므로

$f^{3k+1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f^{3k+2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$, $f^{3k+3}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right) + f^2\left(\frac{1}{4}\right) + f^3\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + f^{99}\left(\frac{1}{4}\right) = 33 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{99}{2}$

15. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



- ① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

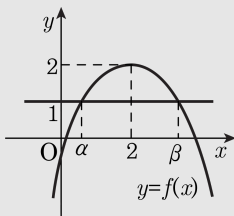
$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$

$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.

이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2개이지만

$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2개이다.