

1. 방정식 $x^2 + y^2 + 2x = 0$ 이 나타내는 도형의 넓이를 구하면?

① 3π

② 2π

③ π

④ $\frac{1}{2}\pi$

⑤ $\frac{1}{3}\pi$

해설

(준식) : $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

중심 $(-1, 0)$, 반지름의 길이가 1 인 원이므로 넓이는 π

2. 원 $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ 과 중심이 같고, 점 $(1, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 - 2y = 0$

② $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 2x + 3 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$

해설

$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ 과 중심이 같은 원의 방정식은

$x^2 + y^2 - 2y + k = 0$ 의 꼴이다.

또, 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 + 1 - 2 + k = 0 \quad \therefore k = 0$$

따라서, 구하는 방정식은 $x^2 + y^2 - 2y = 0$

3. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 의 반지름의 길이는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 &= 0 \\ \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 &= 4 = 2^2 \end{aligned}$$

4. 포물선 $y = x^2 - 2x + 5$ 위의 임의의 한 점 $P(x, y)$ 라 한다. 점 P 에서 원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 차를 구하면?

- ① $2\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

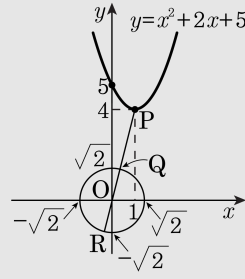
해설

그림과 같이 포물선 위의 한 점 P 에서 원에 이르는 거리의 최솟값은 $\overline{OP} - (\text{반지름의 길이})$ 이고, 최댓값은 $\overline{OP} + (\text{반지름의 길이})$ 가 된다.

따라서, 구하는 최소 길이는 $\overline{PQ}$ 이고,

최대 길이는 $\overline{PR}$ 이므로

$$|\overline{PR} - \overline{PQ}| = (\text{원의 지름의 길이}) = 2\sqrt{2}$$



5. 두 점 A(3, 2), B(6, 5)에 대하여 $2\overline{AP} = \overline{BP}$ 를 만족시키는 점을 P라 할 때, 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$$2\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } 4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면

$$4\{(x-3)^2 + (y-2)^2\} = (x-6)^2 + (y-5)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

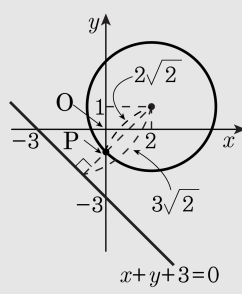
따라서 점 P는 중심이 (2, 1)이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원을 움직인다.

이때, 원의 중심 (2, 1)과 직선 $x+y+3=0$

$$\text{사이의 거리는 } \frac{|2+1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2} \text{이므로}$$

아래 그림에서 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은

$$3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$



6. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

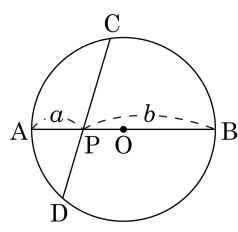
해설

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

OP의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 OP $\sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

7. 다음 그림과 같이 원의 지름 AB 위의 임의의 한 점 P를 지나 PC의 길이가 원의 반지름의 길이와 같아지도록 현 CD를 긋는다. $\overline{AP} = a$, $\overline{BP} = b$ 라 할 때, 선분 DP의 길이를 a, b 를 써서 나타내면?



- ① $\frac{a+b}{2}$ ② $a+b$ ③ $\sqrt{ab}$
 ④ ab ⑤ $\frac{2ab}{a+b}$

해설

$$\overline{CP} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{a+b}{2} \text{ 이고}$$

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP} \text{ 이므로}$$

$$ab = \frac{a+b}{2} \cdot \overline{DP}$$

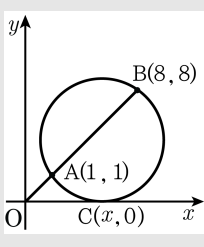
$$\therefore \overline{DP} = \frac{2ab}{a+b}$$

8. 좌표평면 위의 두 점 (1, 1), (8, 8) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

- ① $\frac{5}{2}$
- ② 3
- ③ $\frac{7}{2}$
- ④ $\frac{11}{2}$
- ⑤ 4

해설

다음 그림에서
 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$
 $\therefore x^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{8^2 + 8^2} = 16$
 $\therefore x = 4$

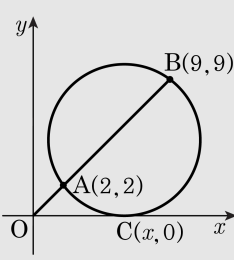


9. 좌표평면 위의 두 점 (2, 2), (9, 9) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O의 접점의 x 좌표는 ?

- ① $\frac{9}{2}$
- ② 5
- ③ $\frac{11}{2}$
- ④ 6
- ⑤ $\frac{13}{2}$

해설

다음 그림에서
 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$
 $\therefore x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36$
 $\therefore x = 6$



10. $y = x^2 - 2$ 위의 점 P에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때, 그 접점을 Q라고 하자. 선분 PQ의 길이의 최솟값은 ?

- ① 1 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

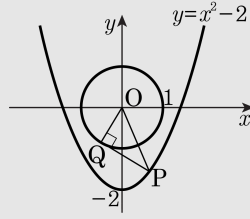
해설

P($x, x^2 - 2$), O(0,0) 라고 하면 $\triangle OPQ$ 는 직각삼각형이다.

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2 \\ &= x^2 + (x^2 - 2)^2 - 1 \\ &= x^4 - 3x^2 + 3 \\ &= \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$\overline{PQ}^2$ 의 최솟값은 $x^2 = \frac{3}{2}$ 일 때, $\frac{3}{4}$ 이다.

따라서, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.



11. 원 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 와 함수 $\sqrt{3}y = |x-2|$ 의 그래프가 만나는 두 점을 A, B 라 하자. 이때, 작은 활꼴 A, B 의 넓이는?

- ① $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$ ③ $2\pi - \sqrt{3}$
 ④ $\frac{4}{3}\pi + \sqrt{3}$ ⑤ $2\pi + \sqrt{3}$

해설

$\sqrt{3}y = |x-2|$ 의 그래프는

$$x < 2 : \sqrt{3}y = -x + 2$$

$$\therefore y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

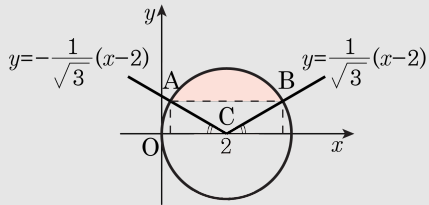
$$x \geq 2 : \sqrt{3}y = x - 2$$

$$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

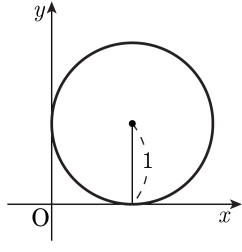
이고 $\angle ACB = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

색칠된 부분의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \times 2^2 \times \sin \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \end{aligned}$$



12. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 (x, y) 에 대하여 $\frac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{y+2}{x+1} = k$ 라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은

k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$ 를 지난다.

이 때, 기울기 k 는 직선이 원에 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$$

$$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$$

$$3k^2 - 12k + 8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로

근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.

13. 직선 $2x + 3y + 7 = 0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면 직선 $2x + 3y + 2 = 0$ 이 된다. 이때, 상수 k 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선 $2x + 3y + 7 = 0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼,
 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면,

$$2(x + 2) + 3(y - k) + 7 = 0$$

$$\therefore 2x + 3y + 11 - 3k = 0$$

이 직선이 $2x + 3y + 2 = 0$ 과 일치하므로

$$11 - 3k = 2 \quad \therefore k = 3$$

14. 다음 중 직선 $x + 2y - 1 = 0$ 을 x 축의 방향으로 3, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동시킨 직선 위에 있는 점은?

① (1, 2)

② (2, 1)

③ (3, 0)

④ (4, -1)

⑤ (5, -2)

해설

$x + 2y - 1 = 0$ 에 x 대신 $x - 3$,

y 대신 $y + 1$ 을 대입하면

$$(x - 3) + 2(y + 1) - 1 = 0$$

$$\therefore x + 2y - 2 = 0$$

따라서 직선 $x + 2y - 2 = 0$ 위에

있는 점은 (4, -1) 이다.

15. 직선 $2x - y + 5 = 0$ 을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 도형의 방정식은?

- ① $2x - y + 3 = 0$ ② $2x + y + 1 = 0$ ③ $2x - y - 1 = 0$
④ $2x - y - 3 = 0$ ⑤ $2x - y - 5 = 0$

해설

직선 $2x - y + 5 = 0$ 을 x 축의 방향으로 4만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼 평행 이동하면

$$2(x - 4) - (y + 2) + 5 = 0$$

$$\therefore 2x - y - 5 = 0$$

16. 점 $(1, 2)$ 를 지나고 x 축 및 y 축에 동시에 접하는 원은 두 개가 존재할 때, 이 두 원의 중심 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로 $(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2$, $r^2 - 6r + 5 = 0$, $(r-1)(r-5) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 $r = 5$
따라서, 두 원의 중심은 각각 $(1, 1)$, $(5, 5)$ 이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$

17. 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이 x 축과 y 축에 동시에 접할 때, $c = ka^2$ 이 성립한다. 이 때, 상수 k 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

따라서, 중심이 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ 이므로

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하기 위해서는

$$\left|-\frac{a}{2}\right| = \left|-\frac{b}{2}\right| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \text{ 이어야 한다.}$$

$$(i) \left|-\frac{a}{2}\right| = \left|-\frac{b}{2}\right| \text{ 에서 } |a| = |b|$$

$$\therefore a^2 = b^2 \dots\dots\textcircled{1}$$

$$(ii) \left|-\frac{a}{2}\right| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \text{ 의 양변을 제곱하면 } \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

$$\therefore b^2 = 4c \dots\dots\textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면 $a^2 = 4c$

$$\therefore c = \frac{1}{4}a^2$$

$$\therefore k = \frac{1}{4}$$

18. 점 $(-1, 2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하면?

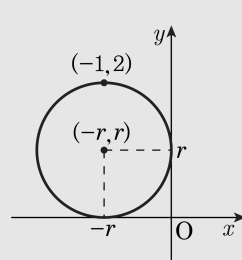
- ㉠ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 25$
 ㉡ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$ 또는 $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 16$
 ㉢ $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3$ 또는 $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$
 ㉣ $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$ 또는 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$
 ㉤ $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5$ 또는 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

해설

점 $(-1, 2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하려면 오른쪽 그림과 같이 원의 중심이 제2사분면에 있어야 한다.

따라서, 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 중심은 $(-r, r)$ 이므로 구하는 원의 방정식을 $(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 으로 놓을 수 있다.

이 때, 이 원이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로 $(-1+r)^2 + (2-r)^2 = r^2$, $r^2 - 6r + 5 = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 $r = 5$



19. 두 원 $(x-1)^2 + y^2 = 9$ 와 $(x+2)^2 + y^2 = 24$ 의 공통현의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

두 원 $(x-1)^2 + y^2 = 9$,
 $(x+2)^2 + y^2 = 24$
 즉, $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$,
 $x^2 + y^2 + 4x - 20 = 0$ 의 공통
 현의 방정식은
 $(x^2 + y^2 - 2x - 8) -$
 $(x^2 + y^2 + 4x - 20) = 0$
 $-6x + 12 = 0 \quad \therefore x = 2$
 $(x-1)^2 + y^2 = 9$ 의 중심 $(1, 0)$ 과 $x = 2$ 와의 거리 $d = 1$
 따라서, 다음 그림에서 원의 공통현은 $\overline{AB}$ 이고,
 $\overline{AM} = \overline{BM}$ 이므로 공통현의 길이는
 $\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - 1} = 4\sqrt{2}$

20. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x+6y=7$ 의 공통현의 길이를 구하면?

- ① $\frac{1}{2}$
- ② 1
- ③ $\sqrt{2}$
- ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ⑤ $\sqrt{3}$

해설

두 원의 교점을 P, Q 라 하고 $\overline{PQ}$ 의 중점을 H 라 하면 $\triangle OPH$ 는 직각삼각형이고,

$\overline{OP}$ 의 길이는 원 $x^2+y^2=1$ 의 반지름이므로 1이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2+y^2-1)-(x^2+y^2-6x+6y-7)=0,$$

$$\text{즉 } x-y+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원 $x^2+y^2=1$ 의 중심 O(0, 0)에서

직선 $\textcircled{1}$ 에 이르는 거리

$$\overline{OH}=\frac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{PH}&=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OH}^2} \\ &=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PH}=\sqrt{2}$$

21. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$ 의 공통현의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{95}$
- ② $\frac{\sqrt{95}}{2}$
- ③ $\frac{\sqrt{95}}{3}$
- ④ $\frac{\sqrt{95}}{4}$
- ⑤ $\frac{\sqrt{95}}{5}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2 + y^2 - 2x - (x^2 + y^2 - 4y - 1) = 0$

$-2x + 4y + 1 = 0, 2x - 4y - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

$x^2 + y^2 - 2x = 0$ 에서

$(x - 1)^2 + y^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B,

$\overline{AB}$ 의 중점을 M, 원 ㉡의 중심을 C (1, 0)

이라 하면

중심 C (1, 0)에서 직선 ㉠까지의 거리

$\overline{CM}$ 은

$$\overline{CM} = \frac{|2 - 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

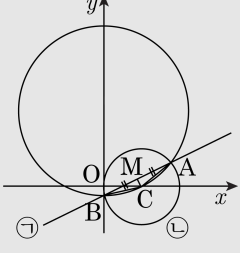
원 ㉡의 반지름의 길이는 1이므로 피타

고라스의 정리에 의하여

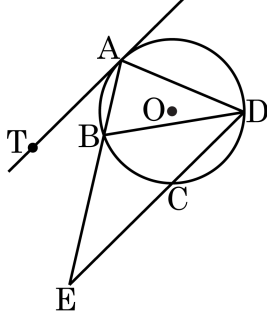
$$\overline{AM} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{95}}{10}$$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{AB}$ 는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2 \cdot \frac{\sqrt{95}}{10} = \frac{\sqrt{95}}{5}$$



22. 네 개의 점 A, B, C, D가 한 원 O 위에 있고, 직선 AT는 원 O의 접선이며, $\overline{CD} \parallel \overline{TA}$ 이다. 또, 점 E는 직선 CD와 AB가 만나는 점일 때, $\overline{AD}$ 의 길이는? (단, $\overline{AB} = 3, \overline{BE} = 6$)



- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

현 AB에 대하여 $\angle BAT = \angle BDA$
 또한, $\overline{ED} \parallel \overline{TA}$ 이므로
 $\angle DEA = \angle EAT$ 이다.
 $\therefore \angle DEA = \angle BDA$ ($\because$ 접선과 현이 이루는 각과 원주각은 같다.)
 따라서 $\triangle EAD \sim \triangle DAB$ (AA 닮음)이므로
 $\overline{AE} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AB}$, $9 : x = x : 3$
 $\therefore x^2 = 27$ $\therefore x = 3\sqrt{3}$ ($\because x > 0$)

23. 좌표평면 위의 두 점 A(8, 0), B(0, 6)에 대하여 삼각형 OAB의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O는 원점)

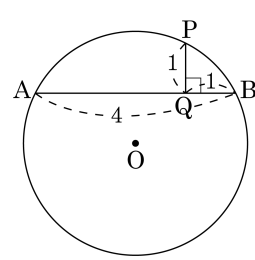
▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB는 외접원의 지름이다.
 $\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
 $a = -8, b = -6, c = 0$
 $\therefore abc = 0$

24. 다음 그림과 같이 한 원 O의 호와 현으로 이루어진 도형에서 $\overline{AB} = 4$, $PQ = \overline{BQ} = 1$ 일 때, 원 O의 반지름의 길이의 제곱을 구하여라.



▶ 답 :

▶ 정답 : 5

해설

그림과 같이 $\overline{PQ}$ 의
연장선과 원 O의 교점을
 P' 이라 하면

$$\overline{P'Q} = 3 \quad (\because \overline{PQ} \cdot \overline{P'Q} = \overline{AQ} \cdot \overline{BQ})$$

또, 원 O의 중심에서 $\overline{AB}, \overline{PP'}$ 에 내린 수선의 발을 각각 N, M이라 하면
 원의 중심에서 현에 그은 수선은

원의 중심에서 현에 그은 수선은
현의 수직이든 보람이로

현을 수직이등분하므로

$$\overline{NB} = \overline{PM} = 2$$

따라서 $\overline{NQ} = \overline{QM} = 1$ 이 되므로

□OMQN은 정사각형이다.

$$\therefore \overline{OM} = 1, \overline{PM} = 2$$

그러므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$r = \overline{OP} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$r = \frac{OI}{2} = \frac{r}{2}$$

