1. 방정식 $x^2+y^2+2x=0$ 이 나타내는 도형의 넓이를 구하면?

① 3π ② 2π ③ π ④ $\frac{1}{2}\pi$ ⑤ $\frac{1}{3}\pi$

해설

(준식) : $(x+1)^2+y^2=1$

중심 $(-1,\ 0)$, 반지름의 길이가 1 인 원이므로 넓이는 π

2. 원 $x^2+y^2-2y-3=0$과 중심이 같고, 점 $(1,\ 1)$을 지나는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2-2y=0$ ② $x^2+y^2-2x+1=0$

③ $x^2+y^2-2y-1=0$ ④ $x^2+y^2-2x+3=0$

⑤ $x^2+y^2-2y+1=0$

해설

$x^2+y^2-2y-3=0$과 중심이 같은 원의 방정식은

$x^2+y^2-2y+k=0$ 의 꼴이다.

또, 점 $(1,1)$을 지나므로

$1+1-2+k=0 \quad \therefore k=0$

따라서, 구하는 방정식은 $x^2+y^2-2y=0$

3. 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 의 반지름의 길이는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x^2+y^2+4x-2y+1=0$

$\Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=4=2^2$

4. 포물선 $y = x^2 - 2x + 5$ 위의 임의의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 라 한다. 점 P 에서 원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 차를 구하면?

① $2\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

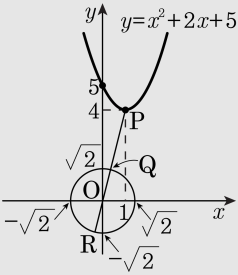
해설

그림과 같이 포물선 위의 한 점 P에서 원에 이르는 거리의 최솟값은 $\overline{\mathrm{OP}}-$(반지름의 길이) 이고, 최댓값은 $\overline{\mathrm{OP}}+$(반지름의 길이)가 된다.

따라서, 구하는 최소 길이는 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 이고,

최대 길이는 $\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$|\overline{\mathrm{PR}} - \overline{\mathrm{PQ}}| =$ (원의 지름의 길이) $= 2\sqrt{2}$



5. 두 점 A(3, 2), B(6, 5)에 대하여 $2\overline{AP} = \overline{BP}$를 만족시키는 점을 P라 할 때, 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$2\overline{AP} = \overline{BP}$에서 $4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면

$4\left\{(x-3)^2 + (y-2)^2\right\} = (x-6)^2 + (y-5)^2$

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$

$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$

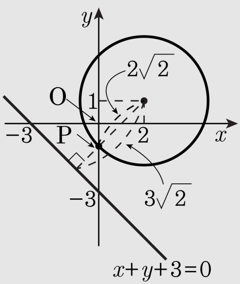
따라서 점 는 중심이 $(2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원 위를 움직인다.

이때, 원의 중심 $(2,\ 1)$과 직선 $x+y+3=0$

사이의 거리는 $\dfrac{|2+1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$이므로

아래 그림에서 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은

$3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$



6. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

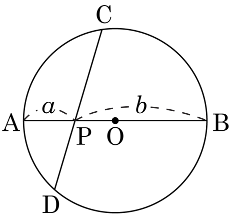
해설

$x^2+y^2-8x-6y+21=0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ $\sqrt{4^2+3^2}+2=7$

7. 다음 그림과 같이 원의 지름 AB 위의 임의의 한 점 P 를 지나 $\overline{\mathrm{PC}}$ 의 길이가 원의 반지름의 길이와 같아지도록 현 CD 를 긋는다. $\overline{\mathrm{AP}}=a$, $\overline{\mathrm{BP}}=b$ 라 할 때, 선분 DP 의 길이를 a, b 를 써서 나타내면?



① $\dfrac{a+b}{2}$ ② $a+b$ ③ $\sqrt{ab}$

④ ab ⑤ $\dfrac{2ab}{a+b}$

해설

$\overline{\mathrm{CP}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{2}=\dfrac{a+b}{2}$ 이고

$\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{DP}}$ 이므로

$ab=\dfrac{a+b}{2}\cdot\overline{\mathrm{DP}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DP}}=\dfrac{2ab}{a+b}$

8. 좌표평면 위의 두 점 $(1,\ 1)$, $(8,\ 8)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x좌표는 ?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 4

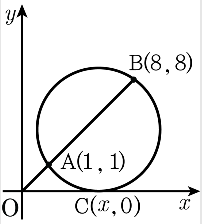
해설

다음 그림에서

$\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$

$\therefore\ x^2 = \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{8^2+8^2} = 16$

$\therefore\ x = 4$



9. 좌표평면 위의 두 점 (2, 2), (9, 9) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

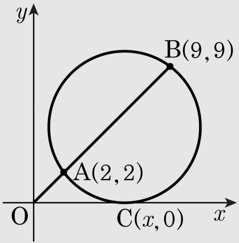
해설

다음 그림에서

$\overline{\mathrm{OC}}^2 = \overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$

$\therefore\ x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36$

$\therefore\ x = 6$



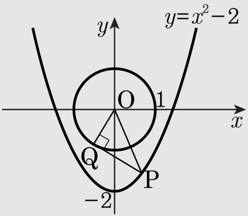
10. $y=x^2-2$ 위의 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$에 접선을 그을 때, 그 접점을 Q라고 하자. 선분 PQ의 길이의 최솟값은?

① 1 ② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$P(x,\ x^2-2)$, $O(0,0)$ 라고 하면 $\triangle OPQ$는 직각삼각형이다.

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{OP}^2-\overline{OQ}^2\\ &= x^2+(x^2-2)^2-1\\ &= x^4-3x^2+3\\ &= \left(x^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$



$\overline{PQ}^2$의 최솟값은 $x^2=\dfrac{3}{2}$일 때, $\dfrac{3}{4}$이다.

따라서, $\overline{PQ}$의 최솟값은 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

11. 원 $(x-2)^2+y^2=4$ 와 함수 $\sqrt{3}y=|x-2|$ 의 그래프가 만나는 두 점을 A, B 라 하자. 이때, 작은 활꼴 A, B 의 넓이는?

① $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$ ③ $2\pi-\sqrt{3}$
④ $\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$ ⑤ $2\pi+\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{3}y=|x-2|$ 의 그래프는

$x<2$: $\sqrt{3}y=-x+2$

$\therefore\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}}$

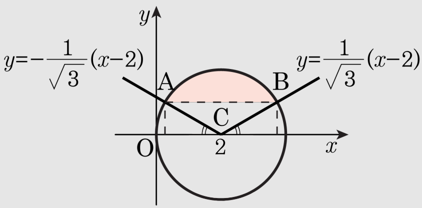
$x\geq 2$: $\sqrt{3}y=x-2$

$\therefore\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{\sqrt{3}}$

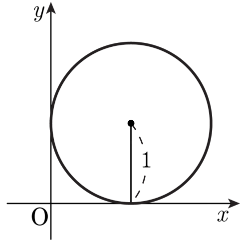
이고 $\angle ACB=\frac{2}{3}\pi$ 이므로

색칠된 부분의 넓이S 는

$$S=\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times 2^2\times\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$



12. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1 인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 $(x,\ y)$ 에 대하여 $\dfrac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\dfrac{y+2}{x+1} = k$라 하면 직선 $y+2=k(x+1)$ 은

k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$를 지난다.

이 때, 기울기 k 는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$$

$$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$$

$$3k^2 - 12k + 8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로

근과 계수와의 관계에 의해 합은 4 이다.

13. 직선 $2x+3y+7=0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면 직선 $2x+3y+2=0$ 이 된다. 이때, 상수 k 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선 $2x+3y+7=0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼,
y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면,
$2(x+2)+3(y-k)+7=0$
$\therefore\ 2x+3y+11-3k=0$
이 직선이 $2x+3y+2=0$ 과 일치하므로
$11-3k=2 \quad \therefore\ k=3$

14. 다음 중 직선 $x+2y-1=0$ 을 x 축의 방향으로 3 , y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동시킨 직선 위에 있는 점은?

① $(1,\ 2)$　② $(2,\ 1)$　③ $(3,\ 0)$　④ $(4,\ -1)$　⑤ $(5,\ -2)$

해설

$x+2y-1=0$ 에 x 대신 $x-3$,
y 대신 $y+1$ 을 대입하면
$(x-3)+2(y+1)-1=0$
$\therefore\ x+2y-2=0$
따라서 직선 $x+2y-2=0$ 위에
있는 점은 $(4,-1)$ 이다.

15. 직선 $2x-y+5=0$ 을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 도형의 방정식은?

① $2x-y+3=0$ ② $2x+y+1=0$ ③ $2x-y-1=0$
④ $2x-y-3=0$ ⑤ $2x-y-5=0$

해설

직선 $2x-y+5=0$ 을 x 축의 방향으로 4 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼 평행 이동하면
$2(x-4)-(y+2)+5=0$
$\therefore 2x-y-5=0$

16. 점 $(1,\ 2)$를 지나고 x축 및 y축에 동시에 접하는 원은 두 개가 존재할 때, 이 두 원의 중심 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-r)^2 \times (y-r)^2 = r^2$ 이 원이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로
$(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2,\ r^2 - 6r + 5 = 0,\ (r-1)(r-5) = 0$
$\therefore r = 1$ 또는 $r = 5$
따라서, 두 원의 중심은 각각 $(1,1)$, $(5,5)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$

17. 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 이 x 축과 y 축에 동시에 접할 때, $c=ka^2$ 이 성립한다. 이 때, 상수 k 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 표준형으로 나타내면

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

따라서, 중심이 $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 이므로

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하기 위해서는

$\left|-\frac{a}{2}\right|=\left|-\frac{b}{2}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 이어야 한다.

(i) $\left|-\frac{a}{2}\right|=\left|-\frac{b}{2}\right|$ 에서 $|a|=|b|$

$\therefore a^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $\left|-\frac{a}{2}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 의 양변을 제곱하면 $\frac{a^2}{4}=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

$\therefore b^2=4c \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡ 에 대입하면 $a^2=4c$

$\therefore c=\frac{1}{4}a^2$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

18. 점 $(-1, 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x+5)^2+(y-5)^2=25$

② $(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 또는 $(x+4)^2+(y-4)^2=16$

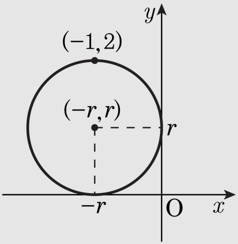
③ $(x-3)^2+(y-3)^2=3$ 또는 $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

④ $(x-4)^2+(y-4)^2=4$ 또는 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$

⑤ $(x-5)^2+(y-5)^2=5$ 또는 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$

해설

점 $(-1, 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 오른쪽 그림과 같이 원의 중심이 제2사분면에 있어야 한다.



따라서, 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 중심은 $(-r, r)$이므로

구하는 원의 방정식을 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$으로 놓을 수 있다.

이 때, 이 원이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$, $r^2-6r+5=0$

$\therefore r=1$ 또는 $r=5$

19. 두 원 $(x-1)^2+y^2=9$와 $(x+2)^2+y^2=24$의 공통현의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

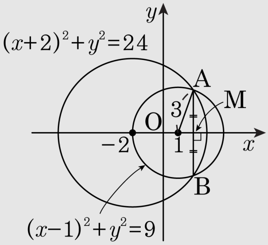
해설

두 원 $(x-1)^2+y^2=9$, $(x+2)^2+y^2=24$

즉, $x^2+y^2-2x-8=0$, $x^2+y^2+4x-20=0$의 공통현의 방정식은

$\left(x^2+y^2-2x-8\right)-\left(x^2+y^2+4x-20\right)=0$

$-6x+12=0 \qquad \therefore x=2$



$(x-1)^2+y^2=9$의 중심 $(1,\ 0)$과 $x=2$와의 거리 $d=1$

따라서, 다음 그림에서 원의 공통현은 $\overline{AB}$이고,

$\overline{AM}=\overline{BM}$이므로 공통현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-1}=4\sqrt{2}$

20. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x+6y=7$ 의 공통현의 길이를 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

두 원의 교점을 P, Q 라 하고 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점을 H 라 하면
$\triangle\mathrm{OPH}$ 는 직각삼각형이고,
$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 길이는 원 $x^2+y^2=1$ 의 반지름이므로 1 이다.
두 원의 공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-1)-(x^2+y^2-6x+6y-7)=0$,
즉 $x-y+1=0$ ······㉠
원 $x^2+y^2=1$ 의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 에서
직선 ㉠에 이르는 거리

$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{2}$$

21. 두 원 $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-4y-1=0$의 공통현의 길이를 구하면?

① $\sqrt{95}$ ② $\frac{\sqrt{95}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{95}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{95}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{95}}{5}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-2x-\left(x^2+y^2-4y-1\right)=0$

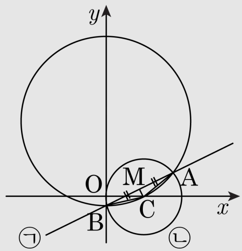
$-2x+4y+1=0,\ 2x-4y-1=0 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2-2x=0$에서

$(x-1)^2+y^2=1 \cdots\cdots$ ㉡

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 M, 원 ㉡의 중심을 C $(1,0)$이라 하면

중심 C $(1,0)$에서 직선 ㉠까지의 거리 $\overline{\mathrm{CM}}$은



$$\overline{\mathrm{CM}}=\frac{|2-0-1|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

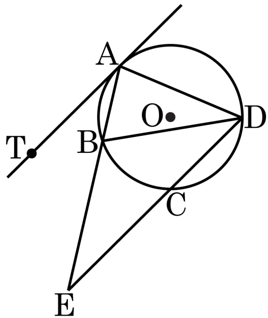
원 ㉡의 반지름의 길이는 1이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{95}}{10}$$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{\mathrm{AB}}$는

$$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}=2\cdot\frac{\sqrt{95}}{10}=\frac{\sqrt{95}}{5}$$

22. 네 개의 점 A , B , C , D 가 한 원 O 위에 있고, 직선 AT 는 원 O 의 접선이며, $\overline{CD} \,//\, \overline{TA}$ 이다. 또, 점 E 는 직선 CD 와 AB 가 만나는 점일 때, $\overline{AD}$ 의 길이는? (단, $\overline{AB} = 3, \overline{BE} = 6$)



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

현 AB에 대하여 $\angle BAT = \angle BDA$

또한, $\overline{ED} \,//\, \overline{TA}$ 이므로

$\angle DEA = \angle EAT$ 이다.

$\therefore \angle DEA = \angle BDA$ ($\because$ 접선과 현이 이루는 각과 원주각은 같다.)

따라서 $\triangle EAD \backsim \triangle DAB$(AA닮음) 이므로

$\overline{AE} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AB}$, $9 : x = x : 3$

$\therefore x^2 = 27$ $\therefore x = 3\sqrt{3}$ ($\because x > 0$)

23. 좌표평면 위의 두 점 $A(8,0)$, $B(0,6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 일 때, 세 상수 a,b,c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

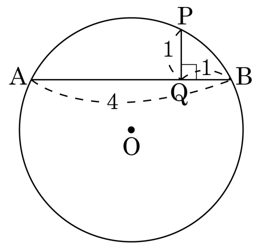
▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{AB}=10$ 이고 원의 중심은 $C(4,3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$
이 식을 정리하면 $x^2+y^2-8x-6y=0$
$a=-8,\ b=-6,\ c=0$
$\therefore abc=0$

24. 다음 그림과 같이 한 원 O 의 호와 현으로 이루어진 도형에서 $\overline{AB} = 4$, $\overline{PQ} = \overline{BQ} = 1$ 일 때, 원 O 의 반지름의 길이의 제곱을 구하여라.

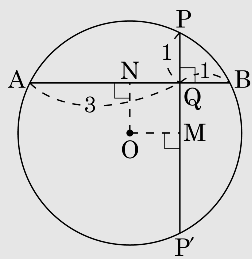


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

그림과 같이 $\overline{PQ}$ 의 연장선과 원 O 의 교점을 P′ 이라 하면



$\overline{P'Q} = 3$ ($\because$ $\overline{PQ} \cdot \overline{P'Q} = \overline{AQ} \cdot \overline{BQ}$)

또, 원 O 의 중심에서 $\overline{AB}, \overline{PP'}$ 에 내린 수선의 발을 각각 N, M 이라 하면

원의 중심에서 현에 그은 수선은 현을 수직이등분하므로

$\overline{NB} = \overline{PM} = 2$

따라서 $\overline{NQ} = \overline{QM} = 1$ 이 되므로

□OMQN 은 정사각형이다.

$\therefore$ $\overline{OM} = 1$, $\overline{PM} = 2$

그러므로 피타고라스의 정리에 의하여

$r = \overline{OP} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$r^2 = 5$