1. 다음 <보기1>의 명제와 <보기2>의 명제가 서로 밀접한 관계가 있는 것끼리 옳게 짝지어진 것을 고르면?

보기1

Ⅰ. 임의의 집합 A, B 에 대해 항상 성립한다.
Ⅱ. $A \subset B$ 와 동치이다.
Ⅲ. $A \cap B = \phi$ 와 동치이다.

보기2

가. $A \cap (A \cup B) = A$
나. $A \cap B = A$
다. $A \cap B^c = A$

① Ⅰ-가, Ⅱ-나, Ⅲ-다
② Ⅰ-가, Ⅱ-다, Ⅲ-나
③ Ⅰ-나, Ⅱ-가, Ⅲ-다
④ Ⅰ-나, Ⅱ-다, Ⅲ-가
⑤ Ⅰ-다, Ⅱ-가, Ⅲ-나

해설

Ⅰ. 임의의 집합 A, B 에 대하여 $A \subset (A \cup B)$
$\therefore \quad A \cap (A \cup B) = A$
따라서 Ⅰ-가
Ⅱ. $A \subset B \iff A \cap B = A$ 따라서, Ⅱ -나
Ⅲ. $A \cap B^c = A \iff A \cap B = \phi$ 따라서, Ⅲ -다

2. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 P, Q, R 이라 할 때, $P-Q=R$ 을 만족한다. 다음 <보기> 중 항상 참인 명제를 <u>모두</u> 고른 것은?

보기

ㄱ. $r \rightarrow \sim q$ ㄴ. $r \rightarrow p$ ㄷ. $r \rightarrow q$

ㄹ. $\sim r \rightarrow \sim p$ ㅁ. $p \rightarrow q$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㅁ

④ ㄷ, ㄹ, ㅁ ⑤ ㄴ, ㄹ, ㅁ

해설

$P-Q=R$

따라서, $R \subset P$ 이고 집합간의 관계를 살펴보면

$Q=R^c, R=Q^c$ 이 된다.

이를 명제로 표현하면 $r \rightarrow p, q \rightarrow \sim r, r \rightarrow \sim q$ 이므로 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

3. 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 할 때, $P \cup (Q - P) = Q$이다. 다음 명제 중 반드시 참인 것은?

① $\sim p \rightarrow q$ ② $q \rightarrow p$ ③ $q \rightarrow \sim p$

④ $\sim q \rightarrow \sim p$ ⑤ $\sim p \rightarrow \sim q$

해설

$P \cup (Q - P) = P \cup (Q \cap P^C)$ (차집합의 성질)

$= (P \cup Q) \cap (P \cup P^c)$ (분배법칙)

$= (P \cup Q) \cap U$

$= P \cup Q = Q$ 이므로 $P \subset Q$

$P \subset Q$ 이면 $Q^c \subset P^c$ 이므로 $\sim q \rightarrow \sim p$ 가 참

해설

$P \subset Q$ 이면 $p \rightarrow q$ 가 참이고 그 대우인 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

4. 두 집합 $A=\{a,\ b,\ c\}$, $B=\{a,\ c,\ e\}$ 에 대하여 집합 A 의 부분집합도 되고 집합 B 의 부분집합도 되는 집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

집합 A 의 부분집합도 되고 집합 B 의 부분집합도 되는 집합은 $\{a,\ c\}$ 의 부분집합과 같으므로 $2^2=4$ (개)

5. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 $2x^2 - 3x - 2 = 0\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여 집합 B 의 부분집합 중 A 와 서로소인 집합 X 의 개수는?

① 7 개 ② 8 개 ③ 9 개 ④ 15 개 ⑤ 16 개

해설

$2x^2 - 3x - 2 = (x-2)(2x+1)$, $A = \left\{-\frac{1}{2},\ 2\right\}$

(A 와 서로소인 집합 X) = (2를 원소로 갖지않는 A 의 부분집합)

$2^{4-1} = 2^3 = 8$

6. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2개인 부분집합들의 원소의 총합은?

① 50　② 60　③ 70　④ 75　⑤ 120

해설

특정 원소, 예를 들어 1이 들어가고 원소가 2개인 부분집합은 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}$ 이와같이 4가지이다. 이는 다른 원소의 경우도 마찬가지이므로 구하는 원소들의 합은 $4 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 60$

7. x, y 가 실수일 때, 다음 중에서 조건 p가 조건 q 이기 위한 필요충분인 것은 ?

① $p : x+y \geq 2$, $q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$

② $p : x+y$는 유리수이다., $q : x,\ y$는 유리수이다.

③ $p : xy > x+y > 4$, $q : x > 2$이고 $y > 2$

④ $p : xy+1 > x+y > 2$, $q : x > 1$이고 $y > 1$

⑤ $p : xyz = 0$, $q : xy = 0$

해설

① $p : x+y \geq 2 \Rightarrow q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (반례 : $x = 2,\ y = -1$)

② $p : x+y$ 는 유리수이다. $\Rightarrow q : x,\ y$는 유리수이다. (반례 : $x = 1-\sqrt{2},\ y = 1+\sqrt{2}$)

③ $p : xy > x+y > 4 \Rightarrow q : x > 2$ 이고 $y > 2$ (반례 : $x = 4,\ y = 2$)

④ $p : xy+1 > x+y > 2 \Leftrightarrow q : x > 1$ 이고 $y > 1$

⑤ $p : xyz = 0 \Rightarrow q : xy = 0$ (반례 : $x = 1,\ y = 1,\ z = 0$)

8. 다음 보기 중 $a^2+b^2 \neq 0$과 동치인 것을 모두 고르면? (단, a, b 는 실수)

㉠ $a^2+b^2=0$	㉡ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
㉢ $ab \neq 0$	㉣ $a+b \neq 0$ 이고 $ab=0$
㉤ $a^2+b^2>0$	

① ㉠　② ㉡　③ ㉢

④ ㉠, ㉡　⑤ ㉡, ㉤

해설

$a^2+b^2 \neq 0$은 a, b중 적어도 하나는 0 이 아니므로 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다.
㉠ $a^2+b^2=0$ 이면 $a=0$ 이고 $b=0$ 이다.
㉢ $ab \neq 0$ 이면 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ 이다.
㉣ $a+b \neq 0$ 이고 $ab=0$ 이면 a, b 둘 중에 하나는 0이 아니다.
㉤ $a^2+b^2>0$ 이면 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다. 따라서 $a^2+b^2 \neq 0$ 과 동치인 것은 ㉡, ㉤이다.

9. 다음은 a, b 가 실수일 때, 보기 중에서 서로 동치인 것끼리 짝지어 놓은 것이다. 옳지 <u>않은</u> 것은?

보기

ㄱ $ab = 0$
ㄴ $a^2 + b^2 = 0$
ㄷ $a^2 + b^2 > 0$
ㄹ $a = 0$ 이고 $b = 0$
ㅁ $a = 0$ 또는 $b = 0$
ㅂ $a = 0$ 이고 $b \neq 0$
ㅅ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
ㅇ $ab = 0$ 이고 $b \neq 0$
ㅈ $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$

① ㄱ과 ㅁ
② ㄴ와 ㄹ
③ ㄷ과 ㅅ
④ ㅂ와 ㅇ
⑤ ㄷ과 ㅈ

해설

$ab \ \leftrightarrow \ a = 0$ 또는 $b = 0$
$a^2 + b^2 \ \leftrightarrow \ a = 0$ 이고 $b = 0$
$a^2 + b^2 > 0 \ \leftrightarrow \ a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
$ab = 0$ 이고 $b \neq 0 \leftrightarrow \ a = 0$ 이고 $b \neq 0$

10. 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 못한 부분은?

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}} \cdots ㉠$$
$$= \frac{4}{\sqrt{xy}}$$
$$\therefore \quad \sqrt{xy} \geq 4 \cdots ㉡$$
$$\therefore \quad x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\cdot 4 = 8 \cdots ㉢$$
따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. ······㉣

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉣
⑤ 틀린 곳이 없다.

해설

㉠에서 등호가 성립하는 경우는 $\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$
즉 $y=4x$일 때이고,
㉢에서 등호가 성립하는 경우는
$x=y$일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서 $x+y$의 최솟값은 8이 될 수 없다.

11. 다음은 $a>0,\ b>0$일 때 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$임을 증명한 것이다. (　　　) 안에 알맞은 것은?

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\qquad)^2}{2}\geq 0$$

① $\sqrt{a}+\sqrt{b}$　② $\sqrt{a}-\sqrt{b}$　③ $a+b$

④ $a-b$　⑤ ab

해설

$$\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}$$

$$=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2}{2}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0$$

12. 임의의 양의 실수 x, y에 대하여 $A=\dfrac{x+y}{2}$, $G=\sqrt{xy}$, $H=\dfrac{2xy}{x+y}$라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $G \geq A \geq H$　② $A \geq H \geq G$　③ $A \geq G \geq H$

④ $H \geq G \geq A$　⑤ $H \geq A \geq G$

해설

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

$\therefore A \geq G \cdots$ ㉠

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy}(x+y) \geq 2xy$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq \dfrac{2xy}{x+y}$

$\therefore G \geq H \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $A \geq G \geq H$