1. 점 $(3,1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 다음 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(-5,-2)$　　② $(-2,\ 4)$　　③ $(-1,3)$

④ $(0,1)$　　⑤ $(4,7)$

해설

점 $(3,1) \xrightarrow[\text{대칭이동}]{x\text{축에 대하여}}$ 점 $(3,-1) \xrightarrow[\text{대칭이동}]{\text{직선 } y=x\text{에 대하여}}$ 점 $(-1,3)$

2. 직선 $2x-y+3=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 다음 y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $x+2y+3=0$　　② $x+4y+6=0$

③ $2x+y+2=0$　　④ $2x+4y+6=0$

⑤ $3x+2y+1=0$

해설

직선 $2x-y+3=0$

$\xrightarrow[\text{대칭이동}]{\text{직선 } x=y\text{에 대하여}}$ 직선 $2y-x+3=0$

$\xrightarrow[\text{대칭이동}]{y\text{축에 대하여}}$ 직선 $2y-(-x)+3=0$,

즉 $x+2y+3=0$

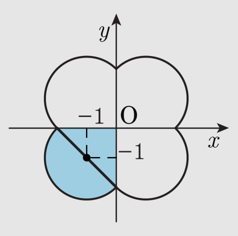
3. 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$의 제 3사분면에 있는 부분과 이 부분을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동해서 생기는 모든 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\pi+2$ ② $2\pi+4$ ③ $2\pi+8$

④ $4\pi+8$ ⑤ $8\pi+8$

해설

원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$는 다음 그림과 같으므로

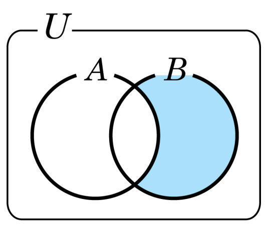


어두운 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\pi\times\sqrt{2}^2+\frac{1}{2}\times2\times2=\pi+2$

따라서 구하는 넓이는 어두운 부분의 넓이의 4배와 같으므로

$4(\pi+2)=4\pi+8$

4. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 것이 아닌 것은?

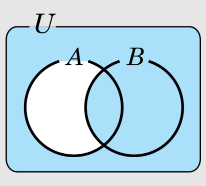


① $B-A$　② $A^c \cap B$　③ $A^c \cup B$

④ $B-(A\cap B)$　⑤ $(A\cup B)-A$

해설

③ $A^C \cup B$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



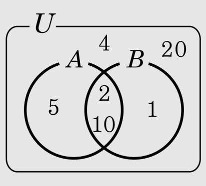
5. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A^c = \{1,\ 4,\ 20\}$, $B^c = \{4,\ 5,\ 20\}$, $A \cup B = \{x \mid x\text{는 } 10\text{의 약수}\}$일 때, 집합 A를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $A = \{2,\ 5,\ 10\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



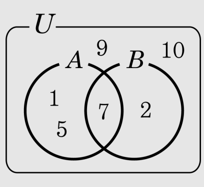
$\therefore A = \{2,\ 5,\ 10\}$

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A^c = \{2,\ 9,\ 10\}$, $B^c = \{1,\ 5,\ 9,\ 10\}$, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 5,\ 7\}$ 일 때, 집합 B 의 원소의 합은?

① 2 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 13

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



따라서 $B = \{2,\ 7\}$ 이므로 집합 B 의 원소의 합은 9 이다.

7. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 5\}$ 에 대하여
$(A \cup B)^c \subset X, (A - B)^c \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개　② 4 개　③ 8 개　④ 16 개　⑤ 32 개

해설

$(A \cup B)^c = \{4\}$, $(A - B)^c = \{2, 4, 5\}$
$(A \cup B)^c \subset X \subset (A - B)^c$, 즉 $\{4\} \subset X \subset \{2, 4, 5\}$ 이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$(개) 이다.

8. 전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x|x\text{는 짝수}\}$,
$B = \{x \mid x\text{는 } 5\text{의 배수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B)^c \subset X, (A - B)^c \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{5, 10\}$ 이고 $(A \cup B)^c = \{1, 3, 7, 9\}$, $(A - B)^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ 이다.
따라서 $(A \cup B)^c \subset X \subset (A - B)^c$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$(개) 이다.

9. 집합 $A = \{1,3,5,7,9\}, B = \{7,9,10\}$ 이고, $n(A \cup X) = 5, n((A-B) \cap X) = 3$ 일 때, 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4개

해설

$n(A \cup X) = 5$ 에서 $n(A) = 5$ 이므로 $A \cup X = A$,즉 $X \subset A$ 가 된다.
또, $n((A-B) \cap X) = n(\{1,3,5\} \cap X) = 3$ 에서 $(A-B) \subset X$ 이다. 따라서 $(A-B) \subset X \subset A$ 이므로
$1,3,5$ 를 반드시 포함하는 A 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2 \times 2 = 4$(개) 이다.

10. 전체집합을 $U = \{-1,\ 0,\ 1\}$이라 할 때, 전체집합 U에 대하여 다음 중 참인 명제는?

① 모든 x에 대하여 $x^2 > 1$이다.

② 임의의 x, y에 대하여 $x + y \le 1$이다.

③ 어떠한 x에 대하여도 $x^2 + 2x \ge -1$ 이다.

④ 적당한 x, y에 대하여 $x^2 - y^2 > 1$이다.

⑤ $x^2 + x < x^3$ 인 x가 존재한다.

해설

① 반례 : $x = 0$ 일 때 $x^2 = 0$ 이므로 주어진 명제 는 거짓이다.
② 반례 : $x = y = 1$ 일 때 $x + y = 2 \ge 1$ 이므로 주 어진 명제는 거짓이다.
③ 모든 x 에 대하여 $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \ge 0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
④ 모든 x, y 에 대하여 $x^2 - y^2 \le 1$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
⑤ 모든 x 에 대하여 $x^2 + x \ge x^3$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

11. 명제 '모든 실수 x, y, z에 대하여 $xy = yz = zx$ 이다.'를 부정한 것은?

① 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz \neq zx$ 이다.

② 어떤 실수 x, y, z 에 대하여$xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.

③ 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$이고 $yz \neq zx$ 이다.

④ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$이고 $zx \neq xy$ 이다.

⑤ 어떤 실수 x, y, z에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

해설

'$xy = yz = zx$ ' 는 '$xy = yz$ 이고 $yz = zx$이고 $zx = xy$ ' 이므로 '$xy = yz = zx$ ' 의 부정은 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다. 따라서 주어진 명제의 부정은 어떤 실수 $x,\ y,\ z$ 에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

12. 다음 중 참인 명제는?

① 2 는 홀수이다.
② $\sqrt{2}$ 는 유리수이다.
③ 99 는 100 보다 작다.
④ $\varnothing$ 은 무한집합이다.
⑤ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 > 0$ 이다.

해설
③ 99 는 100 보다 작은 것이 사실이므로 참이다.

13. 두 실수 a, b에 대하여 두 등식 $a+b=|a+b|$, $|a+b|=|a|+|b|$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

① $a+b \geq 0$

② $a \geq 0$이고$b \geq 0$

③ $a \geq 0$ 또는 $b \geq 0$

④ $ab \geq 0$

⑤ $ab \leq 0$

해설

$a+b=|a+b|, |a+b|=|a|+|b| \Rightarrow a+b=|a|+|b|$

$\therefore a \geq 0$이고$b \geq 0$

14. 다음 중 조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고르면? (단, x, y는 실수)

㉠ $p : x=0$ 또는 $y=0$, $q : xy=0$
㉡ $p : xy=1$, $q : x=1$ 이고 $y=1$
㉢ $p : x$, y는 모두 짝수, $q : x+y$는 짝수

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

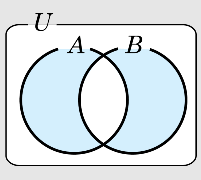
해설
㉡ 필요조건
㉢ 충분조건

15. 다음 중에서 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$가 성립하기 위한 필요충분조건은 ?

① $A = B$ ② $B \subset A$ ③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \varnothing$ ⑤ $A \cap B = B$

해설



$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\
&= (A - B) \cup (B - A) \\
&= B \cap A^c \\
&= B - A
\end{aligned}
$$

$\therefore\ A - B = \phi$

그러므로 $A \subset B$

해설

$(A-B) \cup (B-A) = B-A$ 에서$(A-B)$와$(B-A)$ 는 서로소이므로 등식이 성립하려면 $A - B = \varnothing$ 가 되어야 한다. $A - B = \varnothing \leftrightarrow A \subset B$

16. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q는 p이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : <u>조건</u>

▷ 정답 : 필요<u>조건</u>

해설

$P \subset R \subset S \subset Q$ ∴ $P \subset Q$이므로 $P \subset Q$
∴ q 는 p 이기 위한 필요조건

17. 조건 $p,\ q,\ r,\ s$에서 $p,\ q$는 어느 것이나 r이기 위한 충분조건, s는 r이기 위한 필요조건, q는 s이기 위한 필요조건이라 한다. 이 때, r은 s이기 위한 무슨 조건인가 ?

① 필요조건 ② 충분조건

③ 필요충분조건 ④ 아무 조건도 아니다.

⑤ 위 사실로는 알 수 없다.

해설

p는 r이기 위한 충분조건이므로
$p \Rightarrow r$ 같은 방법으로 하면
주어진 조건으로부터 $q \Rightarrow r,\ r \Rightarrow s,\ s \Rightarrow q$
$\therefore r \Rightarrow s$ 이고 $s \Rightarrow r$ 이므로 $r \leftrightarrow s$
따라서, r은 s이기 위한 필요충분조건이다.

$$\begin{tikzcd} & q \arrow[d, Rightarrow] & \\ p \arrow[r, Rightarrow] & r \arrow[r, Rightarrow] & s \arrow[ul, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

18. 두 명제 $p \to q$ 와 $q \to r$ 가 모두 참이면 명제 $p \to r$ 도 참이 된다. 이 성질을 이용하여 다음을 구하여라.

> 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 p는 r이기 위한 충분조건, q는 r이기 위한 충분조건, s는 r이기 위한 필요조건, q는 s이기 위한 필요조건이다.

이 때, p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답: ________ 조건

▷ 정답: 충분조건

해설

$p \to r$, $q \to r$, $r \to s$, $s \to q$ 가 참이다. $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$ 이므로 $p \Rightarrow q$ 이다.

$\therefore$ p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

19. 두 집합 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$에 대하여 $A \subset C$이고 $C \subset B$를 만족하는 집합 C를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{a, b, c\}$

해설

$A \subset C$이고 $C \subset B$는 $\{a, b, c\} \subset C \subset \{a, b, c, d, e\}$이다.
즉, $\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중 원소 a, b, c를 반드시 포함하는 부분집합이다.
따라서
$\{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, c, d, e\}$이다.

20. 집합 $A=\{x \mid x$는 24의 약수$\}$ 의 1, 3 을 반드시 포함하고 12, 24 는 포함하지 않는 부분집합 중 원소의 개수가 4 개인 것을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1, 2, 3, 4\}$

▷ 정답 : $\{1, 2, 3, 6\}$

▷ 정답 : $\{1, 2, 3, 8\}$

▷ 정답 : $\{1, 3, 4, 6\}$

▷ 정답 : $\{1, 3, 4, 8\}$

▷ 정답 : $\{1, 3, 6, 8\}$

해설

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ 에서 원소 1, 3, 12, 24 를 제외한 $\{2, 4, 6, 8\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2 개인 것은
$\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}$,
$\{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}$
의 6 개이므로, 1, 3 을 반드시 포함하고 12, 24 는 포함하지 않는 A 의 부분집합은
$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 8\}$,
$\{1, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 4, 8\}, \{1, 3, 6, 8\}$ 이다.

21. 집합 $A=\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ 1, \{1,\ 3\}\}$ 일 때, 원소 $\{\varnothing\}$ 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{1,\ \{\varnothing\}\}$, $\{\{1,\ 3\},\ \{\varnothing\}\}$, $\{\{\varnothing\},\ \varnothing,\ 1\}$, $\{\{\varnothing\},\ \varnothing,\ \{1,\ 3\}\}$, $\{\{\varnothing\},\ 1,\ \{1,\ 3\}\}$, $\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ 1,\ \{1,\ 3\}\}$

해설

원소의 개수가 1 개인 부분집합 : $\{\varnothing\}$
원소의 개수가 2 개인 부분집합 :
$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{1,\ \{\varnothing\}\}$, $\{\{1,\ 3\},\ \{\varnothing\}\}$
원소의 개수가 3 개인 부분집합 : $\{\{\varnothing\},\ \varnothing,\ 1\}$, $\{\{\varnothing\},\ \varnothing,\ \{1,\ 3\}\}$,
$\{\{\varnothing\},\ 1,\ \{1,\ 3\}\}$
원소의 개수가 4 개인 부분집합 :
$\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ 1,\ \{1,\ 3\}\}$

22. $x > 1$ 일 때, $2x + \frac{2}{x-1}$ 는 $x = a$ 일 때, 최솟값 b를 갖는다. 이 때, $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x + \frac{2}{x-1} = 2\left(x + \frac{1}{x-1}\right)$

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x-1} &= (x-1) + \frac{1}{x-1} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} + 1 \\ &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$\therefore\ 2\left(x + \frac{1}{x-1}\right) \geq 3 \cdot 2 = 6$

최솟값은 $x - 1 = \frac{1}{x-1}$ 일 때 6 이다

$\therefore$ 즉, $x = 2$ 일 때 최솟값은 6 이다.

$\therefore a + b = 2 + 6 = 8$

23. 이차방정식 $x^2-2x+k=0$(k는 실수)이 허근을 가질 때, $f(k)=k+1+\frac{1}{k-1}$의 최솟값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$\frac{D}{4}=1-k<0$이므로 $k-1>0$

$f(k)=2+(k-1)+\frac{1}{k-1}$

$\geq 2+2\sqrt{(k-1)\frac{1}{k-1}}=4$

따라서 $f(k)$의 최솟값은 4이다.

24. 다음은 양수 $x,\ y,\ z$가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때, $P=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$ 의 최솟값을 구하는 과정이다.

$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2x^2+2y^2+2z^2$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2(x^2+y^2+z^2)$
$\therefore P^2 \geq$ (가)
따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
등호는 $x=y=z=$(다) 일 때, 성립한다.

위의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

① 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$　　② 9, 3, $\frac{1}{\sqrt{3}}$　　③ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}$
④ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$　　⑤ 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2(x^2+y^2+z^2)$

조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로

$$P^2=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2$$
$$\geq \sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2}\cdot\frac{z^2x^2}{y^2}}+\sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{z^2}}+\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}}+2$$
$$=x^2+y^2+z^2+2=(3)$$

$\therefore\ P\geq\sqrt{3}$ 이므로 P의 최솟값은 ($\sqrt{3}$) 이고,

등호는 $x=y=z=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.

$\because\ x^2+y^2+z^2=1$ 이므로 $x=y=z$ 이면 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$