1. 실수 a, b에 대하여 $a > b$일 때, 다음 <보기> 중 항상 성립하는 것을 모두 골라라.

보기

ㄱ $|a| > |b|$

ㄴ $a^3 > b^3$

ㄷ $a^2 > b^2$

ㄹ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

ㄱ $a > 0 > b$인 경우에서는 b의 절댓값이 더 클 수도 있다.

ㄷ ㄱ과 같은 맥락에서 생각해 볼 수 있다.

ㄹ 역시 $a > 0 > b$인 경우 역수를 취하여도 부등호 방향은 변하지 않는다.

2. $-1 \le x \le 2,\ -5 \le y \le -2$ 일 때, $3x-2y$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16 ② -8 ③ 8 ④ 16 ⑤ 18

해설
$-1 \le x \le 2$ 이므로 $-3 \le 3x \le 6 \cdots\cdots$ ㉠
$-5 \le y \le -2$ 이므로 $4 \le -2y \le 10 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ $+$ ㉡을 하면 $1 \le 3x-2y \le 16$ 따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 16

3. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 > 0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x > 2$

해설

부등식 $2x - 4 > 0$에서

$x > 2 \cdots\cdots$ ①

부등식 $2x^2 - 3x + 1 > 0$에서

$(2x - 1)(x - 1) > 0$

$\therefore x > 1$ 또는 $x < \frac{1}{2} \cdots\cdots$ ②

따라서, 구하는 해는 ①과 ②를

동시에 만족하는 x의 값이므로

$\therefore x > 2$

4. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x - 5 > 3 - 2x \\ 2(x-3) \leq x + 4 \end{cases}$$

① $2 \leq x < 10$ ② $2 < x \leq 10$ ③ $2 < x < 10$
④ $2 \leq x \leq 10$ ⑤ $x \leq 10$

해설

첫 번째 부등식에서 $x > 2 \cdots\cdots$ ㉠
두 번째 부등식에서 $2x - 6 \leq x + 4$
$\therefore x \leq 10 \cdots\cdots$ ㉡
따라서, 구하는 해는 ㉠과 ㉡를
동시에 만족하는 x의 값이므로
$\therefore 2 < x \leq 10$

5. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-9<0 \\ x^2-2x-8 \geq 0 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-3<x<3$　② $-3<x\leq -2$　③ $-3<x\leq 2$
④ $-2<x\leq 2$　⑤ $-1<x\leq -2$

해설

$\begin{cases} x^2-9<0 & \cdots (가) \\ x^2-2x-8 \geq 0 & \cdots (나) \end{cases}$

(가)에서 $(x+3)(x-3)<0$
$\therefore -3<x<3$
(나)에서 $(x+2)(x-4)\geq 0$
$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 4$
따라서 공통 범위를 구하면
$-3<x\leq -2$

6. 다음 부등식의 해가 없을 때, 상수 m의 값의 합은?

$$m^2x - 1 > m(x - 1)$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$m^2x - 1 > m(x - 1)$ 에서

$m^{2x} - 1 > mx - m$

$\therefore (m^2 - m)x > 1 - m \cdots$ ㉠

㉠의 해가 없어야 하므로

$m^2 - m = 0,\ 1 - m \geq 0$

$m^2 - m = 0$에서 $m(m - 1) - 0$

$\therefore m = 0$ 또는 $1 \cdots$ ㉡

$1 - m \geq 0$에서 $m \leq 1 \cdots$ ㉢

따라서 ㉡, ㉢에서 $m = 0$ 또는 $m = 1$

7. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $k^2x+1>2kx+k$가 성립할 때, k 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$k^2x+1>2kx+k$에서
$(k^2-2k)x>k-1$,
$k(k-2)x>k-1$
해가 모든 실수이므로
$k(k-2)=0,\ k-1<0$ 이어야 한다.
$\therefore\ k=0$

8. 부등식 $ax-b^2 > bx+a^2-8$의 해가 모든 실수이기 위한 a 의 조건은? (a, b는 실수)

① $a=b$이고 $-1<a<1$

② $a=b$이고 $-2<a<2$

③ $a=b$이고 $-3<a<3$

④ $a=b$이고 $-4<a<4$

⑤ $a=b$이고 $-5<a<5$

해설

$ax-b^2 > bx+a^2-8$에서

$(a-b)x-b^2-a^2+8>0$이 모든 x에 대해서 성립해야 하므로

$a=b$

$\therefore -2a^2+8>0 \quad 2a^2<8$

$\therefore a^2<4$ 이므로 $-2<a<2$

즉 $a=b$ 이고 $-2<a<2$

9. x에 대한 부등식 $x+2 \le ax+3$ 의 해가 모든 실수일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x+2 \le ax+3$에서 $(1-a)x \le 1$이 부등식의 해가 모든 실수이고 우변이 양수이므로 x의 계수는 0이어야 한다.

$1-a=0$

$\therefore a=1$

10. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2-2x+1 \le 0 \\ x^2+2x+2 \ge 0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

$x^2-2x+1 \le 0 \rightarrow (x-1)^2 \le 0$
$(x-1)^2$ 은 항상 0 이상이므로
만족하는 해는 $x=1$ 이 유일
$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$
$\rightarrow (x+1)^2+1 \ge 1$
$\therefore$ 모든 실수
$\therefore x=1$

11. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \le x+4 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

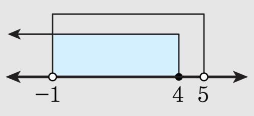
㉠ $2x \le x+4$,

$\therefore x \le 4$

㉡ $x^2-4x-5<0$

$\Rightarrow (x-5)(x+1)<0$

$\therefore -1<x<5$



㉠, ㉡의 범위의

공통범위는 $-1<x\le 4$

$\therefore x=0,1,2,3,4$ 총 5 개

12. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-x-6 \le 0 \\ 4x^2-8x+3 \ge 0 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 3$
② $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $2 \le x \le 3$
③ $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 2$
④ $-2 \le x \le 1$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 3$
⑤ $-2 \le x \le 1$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 2$

해설

$\begin{cases} x^2-x-6 \le 0 & \cdots ㉠ \\ 4x^2-8x+3 \ge 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠ $(x-3)(x+2) \le 0$
$-2 \le x \le 3$
㉡ $(2x-3)(2x-1) \ge 0$
$x \ge \frac{3}{2}, \quad x \le \frac{1}{2}$
㉠과 ㉡의 공통범위 :
$-2 \le x \le \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2} \le x \le 3$

13. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ (x-a)(x+2)>0 \end{cases}$ 의 해가 $-2<x<1$이 될 때, 실수 a의 최댓값은?

① 0　② -2　③ -4　④ -6　⑤ -8

해설

$x^2+3x-4<0$의 해가
$-4<x<1$이므로
연립부등식의 해가 $-2<x<1$가 되려면
$(x-a)(x+2)>0$의 해는
$x<a, x>-2$이고, $a\le -4$이다.

14. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단,$a>1$)

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}\cdots\cdots$ ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a\cdots\cdots$ ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

$\therefore a=3$

15. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \le 0 \\ (x+k)(x-1) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $1 < x \le 6$ 이 되도록 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $k > 1$　　② $k \ge 1$　　③ $k < -1$

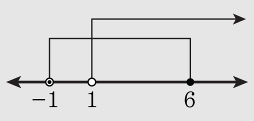
④ $k > -1$　　⑤ $k \ge -1$

해설

$x^2 - 5x - 6 \le 0$,

$(x-6)(x+1) \le 0$,

$-1 \le x \le 6$



연립방정식의 해가 $1 < x \le 6$ 이 되려면

$(x+k)(x-1) > 0$ 의 해는 $x > 1$, $x < -k$ 이어야 하고

다음 그림에서 k 의 범위는 $-k \le -1$, $k \ge 1$

16. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \le 0 \\ x^2 - (k+3)x + 3k > 0 \end{cases}$ 의 해가 $3 < x \le 4$ 가 되도록 하는 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < k < 1$　② $-1 < k < 3$　③ $k \ge -1$
④ $k \le 1$　⑤ $-1 \le k \le 3$

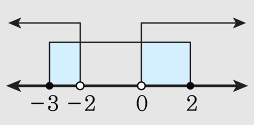
해설

$x^2 - 5x + 4 \le 0$ 에서 $(x-1)(x-4) \le 0$, $1 \le x \le 4$
$x^2 - (k+3)x + 3k > 0$ 에서 $(x-k)(x-3) > 0$
ⅰ) $x < k$ 또는 $x > 3$
ⅱ) $x < 3$ 또는 $x > k$
해가 $3 < x < 4$ 가 되려면 ⅰ) 의 경우이어야 하고 $k \le 1$ 이어야 한다

17. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0 \\ x^2 + ax + b > 0 \end{cases}$ 의 해가 $-3 \leq x < -2$ 또는 $0 < x \leq 2$ 일 때, a, b 를 구하여 $a \times b$ 를 계산하면?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설



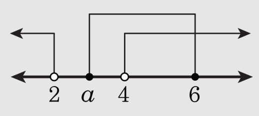
$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) \leq 0$ 에서
$-3 \leq x < 2$ 이므로
연립부등식의 해가 다음 그림과 같으려면 $x^2 - ax + b > 0$ 의 해는
$x < -2, x > 0$ 이어야 한다.
$x^2 + ax + b = x(x+2) = x^2 + 2x > 0$
$\therefore a = 2,\ b = 0$
$\therefore a \cdot b = 0$

18. 다음 연립방정식의 해가 $4 < x \le 6$이 되도록 실수 a의 값의 범위를 정할 때, a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \\ x^2 - (a+6)x + 6a \le 0 \end{cases}$$

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설



$x^2 - 6x + 8 > 0$에서

$(x-2)(x-4) > 0$

$\therefore x < 2$ 또는 $x > 4$

$x^2 - (a+6)x + 6a \le 0$에서

$\Rightarrow (x-a)(x-6) \le 0$

$\therefore$ 두 부등식의 공통부분이 $4 < x \le 6$ 이 되려면

$(x-a)(x-6) \le 0$의 해가 $a \le x \le 6$이어야 하고,

$2 \le a \le 4$ 이어야 한다

$\therefore a$의 최솟값 : 2, 최댓값 : 4

19. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a > b, c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.

② $a > b,\ c > 0$ 이면 $ac > bc,\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ 이다.

③ $a > b > 0$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.

④ $a > b,\ c > d$ 이면 $ac > bd$ 이다.

⑤ $a > b,\ c < 0$ 이면 $ac < bc,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ 이다.

해설

④ $a > b,\ c > d$ 이면 $ac > bd$

반례 : $a,\ b,\ c,\ d$ 가 음수인 경우는 $ac < bd$

20. $(a+b)x+(2a-3b)<0$의 해가 $x<-\frac{1}{3}$일 때, 부등식 $(a-3b)x+(b-2a)>0$을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x<-3$

해설

$(a+b)x+(2a-3b)<0$

$(a+b)x<3b-2a$

$\Rightarrow \quad x<\frac{3b-2a}{a+b}=-\frac{1}{3} \ (a+b>0)$

$\Rightarrow \quad a+b=-3(3b-2a)$

$\Rightarrow \quad a=2b, \quad a+b=3b>0 \rightarrow \ b>0$

$(a-3b)x+(b-2a)>0 \ \Leftrightarrow \ -bx-3b>0$

$bx<-3b$

$\therefore \quad x<-3 \ (\because \ b>0)$

21. 부등식 $ax+1 \geq 2x+5$의 해가 $x \geq 2$일 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

해설

$ax+1 \geq 2x+5$에서 $(a-2)x \geq 4$ 의 부등식의 해가 $x \geq 2$이므로
$a-2>0$
$x \geq \dfrac{4}{a-2}$이므로 $\dfrac{4}{a-2}=2,\ a-2=2$
$\therefore a=4$

22. 두 실수 a, b에 대하여 부등식 $ax > b$의 해가 $x < -2$ 일 때, 부등식 $bx > 2a + 4b$의 해는?

① $x > 0$ ② $x > 1$ ③ $x > 2$ ④ $x > 3$ ⑤ $x > 4$

해설

부등식 $ax > b$의 해가 $x < -2$로 부등호의 방향이 바뀌었으므로
$a < 0$
이때, $x < \frac{b}{a}$에서 $\frac{b}{a} = -2 \therefore b = -2a$
따라서 $bx > 2a + 4b$ 에서 $b = -2a$ 를 대입하면
$-2ax > 2a + 4 \cdot (-2a)$
$-2ax > -6a$
$a < 0$에서 $-2a > 0$이므로
$x > \frac{-6a}{-2a} \therefore x > 3$

23. x에 대한 부등식 $(a+b)x+a-2b>0$의 해가 $x<1$일 때, x에 대한 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$의 해는?

① $x<-10$　② $x<-5$　③ $x>-5$

④ $x<5$　⑤ $x>5$

해설

$(a+b)x+a-2b>0$에서 $(a+b)x>-a+2b\cdots$㉠
㉠의 해가 $x<1$이려면 $a+b<0\cdots$㉡
㉠이 양변을 $a+b$로 나누면 $x<\dfrac{-a+2b}{a+b}$이므로
$\dfrac{-a+2b}{a+b}=1,\ \ -a+2b=a+b$
$\therefore 2a=b\cdots$㉢
㉢을 ㉡에 대입하면 $a+2a=3a<0 \therefore a<0$
㉢을 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$에 대입하면
$(2a-3a)x+a+4a>0,\ \ -ax>-5a\ \ \therefore x>5$

24. $ax+b>0$ 의 해가 $x<2$ 일 때, $(a+b)x<5b$ 의 해는?

① $x>5$ ② $x>10$ ③ $x<1$
④ $x<5$ ⑤ $x<10$

해설

$ax+b>0$ 에서 $ax>-b$
해가 $x<2$ 이므로
$a<0$ $\cdots\cdots$ ㉠
$-\dfrac{b}{a}=2$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉡을 정리하면 $b=-2a$ $\cdots\cdots$ ㉢
㉢에서 $b=-2a$를 $(a+b)x<5b$ 에 대입하면
$(a-2a)x<5\cdot(-2a)$, $-ax<-10a$
㉠에서 $a<0$ 이므로 $x<10$

25. x에 관한 부등식 $(a+2b)x+a-b<0$의 해가 $x>1$일 때, x에 관한 부등식 $(a-b)x+2a-b>0$을 풀면?

① $x>\frac{1}{3}$　② $x<\frac{1}{3}$　③ $x>-\frac{4}{3}$
④ $x<-\frac{4}{3}$　⑤ $x>\frac{7}{3}$

해설

$a+2b<0,\ \frac{-(a-b)}{a+2b}=1$
$\therefore\ b=-2a$이므로
$(a-b)x+2a-b=a(3x+4)>0$
$a>0$을 이용하면
$\therefore\ 3x+4>0\ \ \therefore\ x>-\frac{4}{3}$

26. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$이 되도록 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

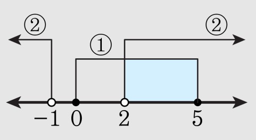
첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x - 5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ①

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 a의 값은 2이다.



27. 두 부등식 $|x-a|<2$, $x^2-2x+1-b^2\le 0$을 동시에 만족하는 x의 값이 없도록 하는 양수 a, b의 관계식은?

① $a-b\ge 3$　② $a-b\le 3$　③ $a-b>3$
④ $a-b<3$　⑤ $a-b>-3$

해설

$-2<x-a<2$
$\Rightarrow\ -2+a<x<2+a$
$x^2-2x+1-b^2\ge 0$
$\Rightarrow \{x-(1+b)\}\{x-(1-b)\}\le 0$
$\Rightarrow\ 1-b\le x\le 1+b$
두 부등식의 공통범위가 없으려면
$2+a\le 1-b$이거나
$1+b\le -2+a$이어야 한다
$\Rightarrow a+b\le -1$ 또는 $a-b\ge 3$

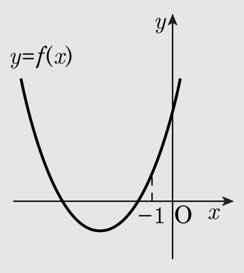
28. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$

(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\frac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

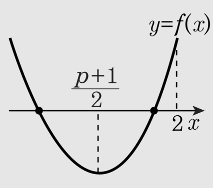
29. x에 대한 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2-p=0$의 서로 다른 두 근이 모두 2보다 작을 때, 양수 p의 값의 범위는?

① $0<p<1$　　② $\frac{1}{2}<p<1$　　③ $1\le p<2$

④ $1<p<\frac{4}{3}$　　⑤ $p>1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2-p$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D라 하면

$\mathrm{D}=(\mathrm{p}+1)^2-4(2-\mathrm{p})>0$

$p^2+6p-7>0,\ (p+7)(p-1)>0$

$\therefore p<-7$ 또는 $p>1$

(ii) $f(2)>0$ 에서 $2^2-(p+1)\cdot 2+2-p>0$

$3p<4$

$\therefore p<\frac{4}{3}$

(iii) $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{p+1}{2}$ 이므로

$\frac{p+1}{2}<2$

$\therefore p<3$

(i), (ii), (iii) 에서 $p<-7$ 또는 $1<p<\frac{4}{3}$

그런데 $p>0$이므로 $1<p<\frac{4}{3}$

30. 이차방정식 $x^2-2mx+m+6=0$의 두 근이 모두 1보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $m \le -6$　　② $m \le -4$　　③ $m \le -2$

④ $m \le 0$　　⑤ $m \le 2$

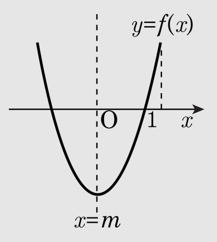
해설

$f(x) = x^2 - 2mx + m + 6 = (x-m)^2 - m^2 + m + 6$으로 놓으면

$\frac{D}{4} = m^2 - 1 \cdot (m+6) = m^2 - m - 6$

$f(1) = 1 - 2m + m + 6 = -m + 7$

두 근이 모두 1보다 작으려면 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서,

(i) 판별식 : $\frac{D}{4} = m^2 - m - 6 \ge 0$

$(m+2)(m-3) \ge 0$

$\therefore m \le -2$ 또는 $m \ge 3$ $\cdots\cdots$ ㉠

(ii) 경계값의 부호 : $f(1) = -m + 7 > 0$

$\therefore m < 7$ $\cdots\cdots$ ㉡

(iii) 축 : $m < 1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터 구하는 m의 값의 범위는 $m \le -2$

31. 이차방정식 $x^2 - 4x + k = 0$의 두 실근이 모두 3보다 작기 위한 실수 k의 범위를 구하면 $m < k \le n$이다. mn의 값을 구하면?

① 10　② 12　③ −15　④ −12　⑤ −10

해설

ⅰ) $D/4 = 4 - k \ge 0,\ k \le 4$

ⅱ) $f(3) > 0,\ k > 3$ 따라서,

ⅰ) ⅱ)를 모두 만족하는 k의 범위는 $3 < k \le 4$

$m = 3,\ n = 4$ 이므로 $mn = 12$

32. x에 대한 이차방정식 $x^2 - x + k = 0$의 한 근만이 이차방정식 $x^2 - 3x + 2 = 0$의 두 근 사이에 있을 때, 실수 k의 값의 범위는?

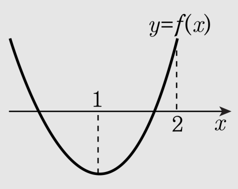
① $1 < k < 2$
② $-2 < k < 0$
③ $-2 \le k \le 0$
④ $k < -2$ 또는 $k > 0$
⑤ $-2 < k < -1$

해설

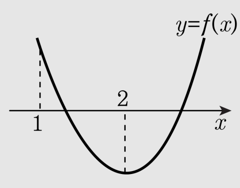
$x^2 - 3x + 2 = 0$ 에서 $(x-1)(x-2) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$

$f(x) = x^2 - x + k$ 로 놓으면 다음 그림과 같이 $y = f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 사이에서 x 축과 만나야 한다.



또는



$\therefore f(1) < 0,\ f(2) > 0$ 또는 $f(1) > 0,\ f(2) < 0$

즉, $f(1)f(2) = k(k+2) < 0$

$\therefore -2 < k < 0$

33. 임의의 실수 x에 대하여 $\sqrt{ax^2+ax+b}$가 실수일 때, 계수 a, b가 만족하는 조건을 구하면?

① $0 \le a \le 4b$　② $0 < a \le 4b$　③ $0 \le a < 4b$

④ $0 < a < 4b$　⑤ $0 < a < 4b$

해설

모든 실수 x에 대하여

$ax^2+ax+b \ge 0$을 만족해야 하므로

ⅰ) $a=0$일 때, $b \ge 0 \cdots$ ①

ⅱ) $a>0$일 때,

$D=a^2-4ab \le 0$

$a-4b \le 0 \cdots$ ②

①, ②에서 $0 \le a \le 4b$

34. 이차방정식 $x^2-ax+a^2-4=0$의 서로 다른 두 실근 α, β가 $\alpha<0<\beta$을 만족할 때, a의 범위를 구하면?

① $a>2$ 또는 $a<-2$

② $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

③ $a>\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a<-\frac{4}{\sqrt{3}}$

④ $-2<a<2$

⑤ $2<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<-2$

해설

ⅰ) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$\Rightarrow D=a^2-4(a^2-4)>0$

$\Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

ⅱ) 두 근이 $\alpha<0<\beta$이려면

$x=0$을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$\Rightarrow a^2-4<0$

$\Rightarrow -2<a<2$

ⅰ), ⅱ)의 공통 범위: $-2<a<2$

35. 이차방정식 $x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ 의 두 근이 -2, 1 사이에 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $\frac{2}{3} < a \le 2$　　② $-2 < a < 4$　　③ $-4 \le a \le 2$

④ $\frac{2}{3} < a \le 4$　　⑤ $a \ge 6$

해설

$f(x) = x^2 + ax + 2a - 3$ 으로 놓으면
이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 -2와 1
사이에 있으므로

(i) $D = a^2 - 4(2a - 3) \ge 0$ 에서
$a^2 - 8a + 12 \ge 0$, $(a - 2)(a - 6) \ge 0$
$\therefore\ a \le 2$ 또는 $a \ge 6$

(ii) $f(-2) = 4 - 2a + 2a - 3 > 0$ 에서
$1 > 0$ 이므로 항상 성립한다.

(iii) $f(1) = 1 + a + 2a - 3 > 0$ 에서
$3a > 2 \quad \therefore\ a > \frac{2}{3}$

(iv) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의
방정식이 $x = -\frac{a}{2}$ 이므로
$-2 < -\frac{a}{2} < 1$
$\therefore\ -2 < a < 4$

따라서 a 의 값의 범위는 $\frac{2}{3} < a \le 2$

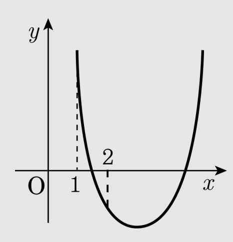
36. 이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 두 근 중 한 근만이 $x^2-3x+2=0$ 의 두근 사이에 존재할 때, 실수 k의 범위는?

① $2<k<4$　② $1<k<6$　③ $5<k<8$

④ $5<k<12$　⑤ $8<k<12$

해설

$f(x)=x^2-6x+k$ 에서 그래프의 중심축이 $x=3$이므로 다음 그림과 같은 형태로 그래프가 그려질 때 주어진 조건을 만족한다.



$f(1)=k-5>0,\ k>5$

$f(2)=k-8<0,\ k<8$

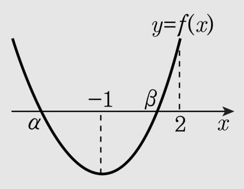
$\therefore\ 5<k<8$

37. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha<-1<\beta<2$가 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-2<a<0$ ② $-2<a<1$ ③ $0<a<2$
④ $1<a<2$ ⑤ $1<a<3$

해설

$f(x)=x^2+2ax+a^2-1$ 로 놓으면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1)<0$, $f(2)>0$

(i) $f(-1)=1-2a+a^2-1<0$ 에서 $a^2-2a<0$, $a(a-2)<0$
$\therefore 0<a<2$

(ii) $f(2)=4+4a+a^2-1>0$ 에서 $a^2+4a+3>0$, $(a+3)(a+1)>0$
$\therefore a<-3$, $a>-1$

(i), (ii) 에서 $0<a<2$

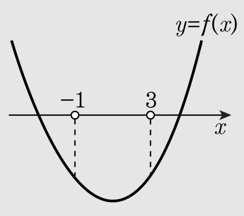
38. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0$, $f(3) \le 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1) \cdot (-1) + 3k \le 0$, $k + 3 \le 0$
$\therefore k \le -3$

(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1) \cdot 3 + 3k \le 0$, $9k + 3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$

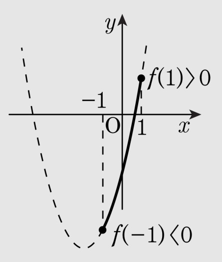
(i), (ii) 에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3 이다.

39. 이차방정식 $x^2 + 4mx - 3m = 0$의 한 근은 -1과 1사이에 있고, 또 한 근은 -1보다 작도록 하는 실수 m의 범위를 구하면?

① $m > \frac{2}{9}$　　② $m > \frac{1}{7}$　　③ $m > -\frac{1}{3}$
④ $m < -\frac{1}{3}$　　⑤ $m < \frac{2}{9}$

해설

$f(x) = x^2 + 4mx - 3m$으로 놓을 때,
$f(x) = 0$의 근이 한 근은 -1과 1사이에 있고, 또 한 근은 -1보다 작아야 하므로



$f(-1) = 1 - 4m - 3m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{7}$

$f(1) = 1 + 4m - 3m > 0 \Rightarrow m > -1$

$\therefore\ m > \frac{1}{7}$

40. 이차방정식 $x^2+ax-2=0$ 의 두 실근 α, β에 대하여 $-2<\alpha<0$, $1<\beta<3$ 이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-\frac{13}{3}<a<-1$　② $-\frac{10}{3}<a<0$　③ $-\frac{7}{3}<a<1$
④ $-\frac{5}{3}<a<2$　⑤ $-\frac{2}{3}<a<3$

해설

$f(x)=x^2+ax-2$ 로 놓으면 $-2<\alpha<0$, $1<\beta<3$ 이므로
$f(-2)>0$, $f(0)<0$, $f(1)<0$, $f(3)>0$ 이어야 한다.
$f(-2)=-2a+2>0$ 에서 $a<1$
$f(0)=-2<0$
$f(1)=a-1<0$ 에서 $a<1$
$f(3)=3a+7>0$ 에서 $a>-\frac{7}{3}$
$\therefore\ -\frac{7}{3}<a<1$