1. 임의의 실수 a에 대하여 원 $x^2+y^2+ax+(a+2)y-(2a+4)=0$ 은 두 정점 A, B 를 지난다. 이 때 선분 AB 의 중점의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ ② $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ ③ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$
④ $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

해설

$x^2+y^2+ax+(a+2)y-(2a+4)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+2y-4+a(x+y-2)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+2y-4=0 \cdots\cdots$ ①
이고 $x+y-2=0 \cdots\cdots$ ②
② 에서 $y=-x+2$ 를 ① 에 대입하면
$x^2+(-x+2)^2+2(-x+2)-4=0$ 이를 정리하면
$2x^2-6x+4=0,\ x^2-3x+2=0$
$\therefore\ x=2,\ y=0$, $x=1,\ y=1$
$\therefore$ A$(2,\ 0)$, B$(1,\ 1)$
$\therefore$ A, B 의 중점의 좌표 $=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

2. 두 점 $(-2,\ 1)$, $(6,\ 5)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $x^2+y^2-2x-4y-7=0$

② $x^2+y^2+4x+8y-15=0$

③ $x^2+y^2-2x-6y-5=0$

④ $x^2+y^2+4x+8y+15=0$

⑤ $x^2+y^2-4x-6y-7=0$

해설

i) 원의 중심은 두 점의 중점과 같다.

$$\Rightarrow \left(\frac{-2+6}{2},\ \frac{1+5}{2}\right)=(2,\ 3)$$

ii) 반지름 길이는 중심과 한 점 사이의 거리와 같 다.

$$\Rightarrow \sqrt{(2-6)^2+(3-5)^2}=2\sqrt{5}$$

$\therefore$ 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-3)^2=(2\sqrt{5})^2$

$$\Rightarrow x^2+y^2-4x-6y-7=0$$

3. x 축에 접하고 두 점 $(3,\ 1)$, $(-4,\ 8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2+(y-12)^2=169$
② $x^2+(y-5)^2=169$
③ $x^2+(y-5)^2=25$
④ $(x-8)^2+(y-13)^2=169$
⑤ $(x-8)^2+(y-13)^2=25$

해설

구하는 원의 중심을 $(a,\ b)$ 라고 하면
x 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
이 원이 두 점 $(3,\ 1)$, $(-4,\ 8)$ 을 지나므로
$(3-a)^2+(1-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉠
$(-4-a)^2+(8-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ − ㉡에서
$b=a+5 \cdots\cdots$ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$a^2-8a=a(a-8)=0 \quad \therefore \quad a=0$ 또는 $a=8$
㉢에서 $a=0$ 일 때 $b=5$, $a=8$ 일 때 $b=13$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+(y-5)^2=5^2$ 또는
$(x-8)^2+(y-13)^2=13^2$

4. 두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$가 외접할 때, r의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$의 중심 사이의 거리 $d=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

두 원이 외접하면 $r+2=5$이므로 $r=3$

5. 두 원 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ 의 두 교점과 점$(1,\ 0)$을 지나는 원의
방정식을 바르게 구한 것은?

① $x^2+y^2-8x-y-4=0$

② $x^2+y^2-8x-4y+16=0$

③ $x^2+y^2-5x-y+16=0$

④ $x^2+y^2-5x-4y+16=0$

⑤ $x^2+y^2-5x-y+4=0$

해설

문제에서 주어진 두 원의 교점을
지나는 임의의 원
또는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2-4x)m+(x^2+y^2-6x-2y+8)=0$ 이다.
위 방정식이 나타내는 원이 점 $(1,0)$ 을 지나므로
$x=1$, $y=0$ 을 대입하면
$-3m+3=0$
$\therefore m=1$
$(x^2+y^2-4x)+(x^2+y^2-6x-2y+8)=0$
$2x^2+2y^2-10x-2y+8=0$,
$x^2+y^2-5x-y+4=0$

6. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ n > 4$ ($\because n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5 이다.

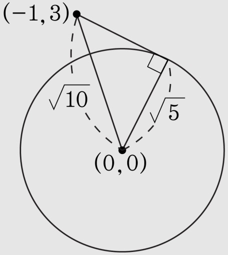
7. $x^2+y^2=5$ 밖의 한 점 $(-1,3)$ 에서 이 원에 접선을 그을 때, 점 $(-1,3)$ 에서 접점까지의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

접선의 길이를 구하는 것이므로
$\sqrt{1^2+(-3)^2-5}=\sqrt{5}$



8. 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, $3m+n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3,\ 4)$ 을 지나는 방정식 : $y=m(x+3)+4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$$\Rightarrow \quad \frac{|m\times(-2)-1\times 1+3m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \quad (m+3)^2=10m^2+10$$

$$\Rightarrow \quad (3m-1)^2=0,\ m=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x+5 \quad \Rightarrow \quad 3m+n=6$

9. 직선 $3x-4y-12=0$ 에 수직이고 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

① $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{5}{2}x-\frac{1}{3}$
② $y=-2x-\frac{4}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{5}x-1$
③ $y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$
④ $y=-\frac{6}{5}x-\frac{2}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{7}x-\frac{9}{2}$
⑤ $y=-4x-3$ 또는 $y=-9x-6$

해설

$3x-4y-12=0$ 에서

$y=\frac{3}{4}x-3 \cdots\cdots$ ㉠

이 때, 구하는 접선이 ㉠과 수직이므로

기울기가 $-\frac{4}{3}$ 인 직선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x+b \cdots\cdots$ ㉡

로 놓을 수 있다.

㉡에서 $4x+3y-3b=0$ 이고,

원의 중심 $(-3,2)$ 에서 이 직선까지의 거리가

반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-12+6-3b|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1, |3b+6|=5, 3b+6=\pm5$

$3b=-1$ 또는 $3b=-11$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$ 또는 $b=-\frac{11}{3}$

이것을 ㉡에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$

해설

$(x+3)^2+(y-2)^2=1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+6x-4y+12=0$ 이므로

㉡을 이 식에 대입하여 정리하면

$25x^2+6(17-4b)x+9\left(b^2-4b+12\right)=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4}=\{3(17-4b)\}^2-25\cdot 9\left(b^2-4b+12\right)=0$

$D=0$에서 $9b^2+36b+11=0$,

$(3b+1)(3b+11)=0$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$ 또는 $b=-\frac{11}{3}$ 이것을 ㉡ 에 대입하면

구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$

10. 점 $(0,\ 4)$를 지나고 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선의 방정식은?

① $y=\pm\sqrt{11}x+4$ ② $y=\pm\sqrt{13}x+4$

③ $y=\pm\sqrt{14}x+4$ ④ $y=\pm\sqrt{15}x+4$

⑤ $y=\pm\sqrt{17}x+4$

해설

접선의 기울기를 m이라고 하면 점 $(0,4)$를 지나는 접선의 방정식은 $y-4=mx$ 즉, $mx-y+4=0$

원의 중심 $(0,0)$로부터 이 직선까지의 거리가 반지름 1과 같아야 하므로

$$\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}=1,\ 4=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 풀면 $m^2=15$

$\therefore m=\pm\sqrt{15}$

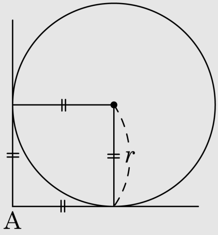
따라서 $y=\pm\sqrt{15}x+4$

11. 좌표평면 위에 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$과 원 밖의 점 A$(2,\ 1)$이 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r의 값은?

① 3 ② $\sqrt{10}$ ③ $\sqrt{11}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림처럼 한 변이 r인 정사각형이 된다.
따라서 원 중심에서 A까지의 거리는 $\sqrt{2}r$이 된다.



$\therefore\ \sqrt{(5-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{2}r$
$\therefore\ r=3$

12. 원 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 위의 점에서 직선 $y=-x+4$에 이르는 최소 거리는?

① $\sqrt{2}-1$ ② $\sqrt{2}$ ③ 3

④ $\sqrt{2}+1$ ⑤ 3

해설

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$은 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$이므로
원의 중심 $(1,1)$에서 직선 $x+y-4=0$까지의 거리 d는

$$d=\frac{|1+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

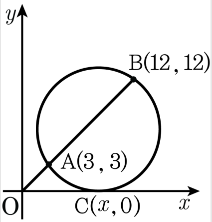
따라서 구하는 최소 거리는
$d-$(원의 반지름의 길이) $=\sqrt{2}-1$

13. 좌표평면 위의 두 점 (3, 3), (12, 12) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{3}{2}$ ② 6 ③ $\frac{5}{2}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{3^2+3^2} \cdot \sqrt{12^2+12^2} = 72 \quad x = 6\sqrt{2}$

14. 점 $\mathrm{P}(a, 0)$에서 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$에 그은 접선의 길이가 4일 때, 점 P의 좌표를 모두 구하면?

① $(1, 0)$, $(7, 0)$　　② $(-1, 0)$, $(7, 0)$　　③ $(1, 0)$, $(-7, 0)$

④ $(-1, 0)$, $(5, 0)$　　⑤ $(1, 0)$, $(-5, 0)$

해설

원의 중심을 $\mathrm{C}(3, 2)$, 접점을 Q라 하면

$\overline{\mathrm{CP}} = \sqrt{(a-3)^2+2^2}$

CPQ는 직각삼각형이므로

$(a-3)^2+4 = 2^2+4^2$

$a^2-6a-7=0$

$(a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$, $(7, 0)$이다.

15. 곡선 $(x-y+1)+m(x^2+y^2-1)=0$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, m 은 임의의 상수)

(Ⅰ) 항상 $(0,\ 1)$ 과 $(-1,\ 0)$ 을 지난다. (Ⅱ) $x-y+1=0$ 과 $x^2+y^2=1$ 의 교점을 지나는 모든 원을 표시 할수 있다. (Ⅲ) 위의 곡선으로 표시 할 수 있는 유일한 직선은 $y=x+1$ 이다.

① Ⅰ　② Ⅱ　③ Ⅲ

④ Ⅰ, Ⅱ　⑤ Ⅰ, Ⅲ

해설

준 식은 $x^2+y^2-1=0$ 과 $x-y+1=0$ 의 교점을 지나는 도형의 방정식이다.
$m=0$ 일 때만 $x-y+1=0$ 이 되어 직선을 나타내며, 그 외에는 항상 원을 나타낸다.
단, m 의 값이 어떤 실수로 주어져도 $x^2+y^2-1=0$ 인 원은 나타낼 수 없다.

16. 점$P_1(1,\ 2)$를 점$P_2(-1,\ 4)$로 옮기는 평행이동에 의하여 점$(2, -2)$는 어떤 점으로 옮겨지는가?

① $(0,\ 0)$ ② $(1,\ 1)$ ③ $(4,\ 0)$

④ $(4, -4)$ ⑤ $(1,\ 2)$

해설

주어진 평행이동은 x축 방향으로 -2, y축 방향으로 $+2$만큼 평행이동하므로 $(2-2, -2+2)=(0,\ 0)$으로 이동한다.

17. 점 $(1,2)$ 를 점 $(-2,-1)$ 로 옮기는 평행이동에 대하여 직선 $y=-2x+k$ 로 옮겨질 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

점 $(1,2)$ 를 점 $(-2,-1)$ 로 옮기는 평행이동을
$T:(x,y)\to(x+m,y+n)$ 이라고 하면,
$(1,2)\xrightarrow{T}(-2,-1)$ 에서
$1+m=-2, 2+n=-1 \qquad \therefore m=-3, n=-3$
$\therefore T:(x,y)\to(x-3,y-3)$
따라서, T 는 x 축의 방향으로 -3 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 옮기는 평행이동이다.
평행이동 $T:(x,y)\to(x-3,y-3)$ 에 의하여
직선 $y=-2x+k$ 는
직선 $y+3=-2(x+3)+k$로 옮겨진다.
이 때, 이 직선이 원점을 지나므로
$x=0,\ y=0$ 을 대입하면
$3=-6+k \qquad \therefore k=9$

18. 원 $x^2+y^2=1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 직선 $y=x+3$ 과 접하게 될 때, 양수 m 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{2}+1$ ② $\sqrt{2}+1$ ③ $\sqrt{2}$

④ $\sqrt{2}-1$ ⑤ $2\sqrt{2}-1$

해설

$x^2+y^2=1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼,
y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면
$(x-m)^2+(y-2)^2=1 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 직선 $x-y+3=0$ 과 접하므로
점 $(m,\ 2)$ 와 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리가 1 이다.

$$\frac{|m-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$$

이것을 풀면 $m=-1\pm\sqrt{2}$
$\therefore m=-1+\sqrt{2}$ $(\because m>0)$

19. 원 $x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-5)^2+(y-4)^2=1 \cdots\cdots$ ㉠
㉠은 원 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 과
직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이므로
두 원의 중심 $(5,4)$, $(-1,\ 8)$ 을 이은 선분의
중점이 직선 $3x+ay+6=0$ 위에 있다.
두 점 $(5,4),(-1,8)$ 을 이은 선분의 중점은

$\left(\dfrac{5+(-1)}{2}, \dfrac{4+8}{2}\right)$, 즉 $(2,6)$ 이므로

$3\cdot 2+a\cdot 6+6=0$
$\therefore a=-2$

20. 직선 $2x-y-1=0$ 에 대하여 점 $(3,\ 0)$ 과 대칭인 점의 좌표를 구하면?

① $(1,\ 2)$ ② $(-1,\ 2)$ ③ $(1,-2)$

④ $(2,-1)$ ⑤ $(-2,\ 1)$

해설

구하는 좌표를 (a,b) 로 놓는다.
점 (a,b) 는 점$(3,\ 0)$ 과 직선 $2x-y-1=0$ 에 대하여 대칭이고, 이 때 점 $(3,0)$과 점 (a,b) 를 연결하는 선분에서 $2x-y-1=0$ 와 수직으로 만나므로

중점 M 의 좌표는 $M\left(\dfrac{a+3}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$

$$2\times\frac{a+3}{2}-\frac{b}{2}-1=0$$

$2a+6-b-2=0$

$2a-b+4=0 \quad \cdots\cdots(가)$

기울기는 $\dfrac{b}{a-3}\times 2=-1$ 이므로

$a=-2b+3$

이것을 (가) 에 대입하면

$2(-2b+3)-b+4=0 \qquad \therefore\ a=-1,\ b=2$

21. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1, 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2, 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3, 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.
$\overline{\mathrm{C_1C_2}}+\overline{\mathrm{C_2C_3}}+\overline{\mathrm{C_3C_4}}=14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\mathrm{C_1}\,(r, r)$, $\mathrm{C_2}\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right)$,

$\mathrm{C_3}\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right)$, $\mathrm{C_4}\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right)$ 이므로

$$\overline{\mathrm{C_1C_2}}+\overline{\mathrm{C_2C_3}}+\overline{\mathrm{C_3C_4}}$$
$$=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2+\left(-\frac{1}{2}r\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2+\left(-\frac{3}{4}r\right)^2}$$
$$+\sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2+\left(\frac{1}{8}r\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{10}}{2}r+\frac{\sqrt{10}}{4}r+\frac{\sqrt{10}}{8}r$$
$$=\frac{7\sqrt{10}}{8}r=14\sqrt{10}$$
$$\therefore r=16$$

22. 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(2,\ 0)$ 에서의 거리의 비가 $3\ :\ 1$ 인 점의 자취위의 점 P 라 할 때, $\triangle$ABP 의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$

$\overline{\mathrm{AP}}\ :\ \overline{\mathrm{BP}} = 3\ :\ 1$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} = 3\overline{\mathrm{BP}} \rightarrow \overline{\mathrm{AP}}^2 = 9\overline{\mathrm{BP}}^2$

따라서, $(x+2)^2+y^2 = 9(x-2)^2+9y^2$

$\rightarrow x^2+4x+4+y^2 = 9x^2-36x+36+9y^2$

$\rightarrow 8x^2+8y^2-40x+32 = 0$

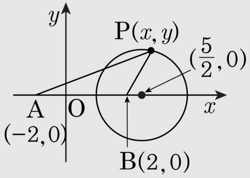
$\rightarrow x^2+y^2-5x+4 = 0$

$$\rightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{25}{4} + 4 = 0$$

$$\rightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

즉, 중심이 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원이다.



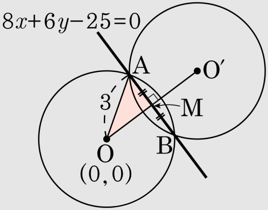
$\therefore$ 넓이 S 의 최댓값 $= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$

23. 두 원 $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x-6y+16=0$의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.



두 원의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-9)-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$

$\therefore 8x+6y-25=0$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고 공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$은 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로 $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\overline{OM}^2}\cdots\cdots$ ㉠

그런데 $\overline{OM}$은 원점 O에서 직선 $8x+6y-25=0$까지의 거리이므로

$$\overline{OM}=\frac{|-25|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{5}{2}\cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=2\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$$

24. 두 점 $A(-1,3)$, $B(2,a)$를
지나는 직선이 원 $x^2+y^2=1$ 과 접할 때, a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 점 $A(-1,3)$, $B(2,a)$ 를

지나는 직선의 방정식은, $y-3=\frac{a-3}{3}(x+1)$

$\therefore\ (a-3)x-3y+a+6=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=1$ 과 접하므로

원의 중심 $(0,0)$ 에서 직선 ㉠에 이르는 거리가

원의 반지름의 길이인 1 과 같다.

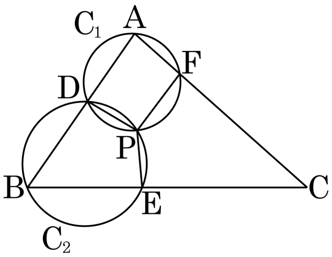
$$\therefore\ \frac{|a+6|}{\sqrt{(a-3)^2+9}}=1$$

$\therefore\ |a+6|=\sqrt{(a-3)^2+9} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡의 양변을 제곱하면 $a^2+12a+36=a^2-6a+9+9$,$18a=-18$

$\therefore\ a=-1$

25. 다음은 삼각형 ABC 의 각 꼭짓점을 지나는 원에 대한 어떤 성질을 설명한 것이다.



그림처럼 세 점 A, D, F 를 지나는 원 C_1 과 세 점 B, D, E 를 지나는 원 C_2 의 교점 P 가 삼각형 ABC 의 내부에 존재하도록 세 변 AB, BC, CA 위에 각각 점 D, E, F 를 잡는다.

$\angle DPF + \boxed{\text{가}} = 180°$

$\angle DPE + \boxed{\text{나}} = 180°$

$\angle DPF + \angle DPE = 360 - \left(\boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}\right)$ 에서

$\angle FPE = \boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}$

$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C_3 라 할때, $\boxed{\quad\text{다}\quad}$

(가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

② (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

③ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

④ (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

⑤ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 외부에 점 P 가 존재한다.

해설

□ADPF 에서 $\angle DPF + \angle A = 180°$

□BEPD 에서 $\angle DPE + \angle B = 180°$

따라서 $\angle DPF + \angle DPE = 360° - (\angle A + \angle B)$

$\angle FPE = \angle A + \angle B$

$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C3 라 할 때,
세 원 C1, C2, C3는 한 점 P 에서 만난다.