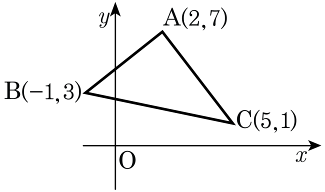
1. 일차함수 $y=(a-2)x+b+2$ 의 그래프가 x 축의 양의 방향과 45^o 의 각을 이루고, y 절편이 5 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① 0 ② 3 ③ 6 ④ -6 ⑤ -3

해설

$y=(a-2)x+b+2$ 의 그래프가
x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가
$45\,°$ 이므로
$a-2=\tan 45\,°=1$ 에서 $a=3$
또, y 절편이 5 이므로
$b+2=5$ 에서 $b=3$
$\therefore\ a+b=6$

2. 세 점 $A(2,\ 7), B(-1\ ,3), C(5,\ 1)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 다음 중 두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식은?



① $x-y-2=0$ ② $x+y-2=0$ ③ $x-2=0$

④ $3x-y+1=0$ ⑤ $4x+y-1=0$

해설

두 점 A, G를 지나는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나므로
점A와 $\overline{BC}$의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.
$\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$$

따라서, 두 점$(2,\ 7)$ 과$(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $x=2$ 이다.

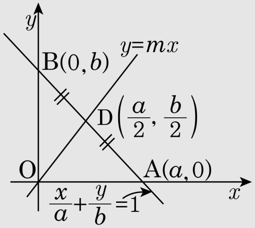
3. 직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y=mx$가 이등분할 때, m의 값은? (단, $a>0,\ b>0$)

① $\dfrac{b}{a}$ ② $\dfrac{a}{b}$ ③ $\dfrac{b}{2a}$ ④ $\dfrac{a}{2b}$ ⑤ $\dfrac{2a}{b}$

해설

다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점을
$\mathrm{D}\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$라 하면
$\triangle\mathrm{OAD}=\triangle\mathrm{OBD}$이므로 직선 $y=mx$
가 점 D를 지나야 한다.

$$\therefore m=\dfrac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}}=\dfrac{b}{a}$$



4. 두 직선 $mx-y+m+1=0$ 과 $y=-x+2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3}<m<1$
② $-\frac{1}{3}<m<1$
③ $-1<m<2$
④ $m<-\frac{1}{3},\ m>1$
⑤ $-1<m<-\frac{1}{3}$

해설

$mx-y+m+1=0\cdots$ ㉠

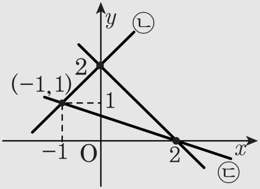
$\Leftrightarrow m(x+1)-(y-1)=0$ 에서

이 직선은 m 의 값에 관계없이

항상 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

다음 그림에서 ㉠이 직선 $y=-x+2$ 와

제1사분면에서 나려면 ㉠의 기울기 m 은



㉡의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)}=1$ 보다 작고

㉢의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)}=-\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.

$\therefore\ -\frac{1}{3}<m<1$

5. 점 $\mathrm{P}(1,2)$ 에서 직선 $2x+y-3=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라할 때, 수선 PH 의 길이는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 3

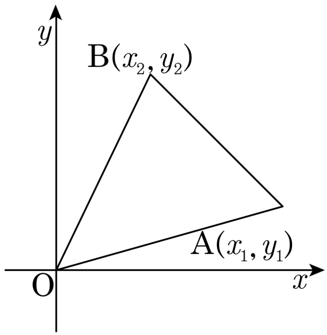
해설

($\overline{\mathrm{PH}}$ 의 길이)

= (점 P(1, 2) 와 직선 $2x+y-3=0$ 과의 거리)

$$\therefore \quad \overline{\mathrm{PH}} = \frac{|2+2-3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

6. 원점 O(0, 0)와 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)로 이루어진 삼각형 OAB의 넓이는?



① $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ ② $\frac{1}{2}|x_1y_1 - x_2y_2|$ ③ $\frac{1}{2}|x_1y_1 + x_2y_2|$
④ $\frac{1}{2}|x_1x_2 - y_1y_2|$ ⑤ $\frac{1}{2}|x_1x_2 + y_1y_2|$

해설

$\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

직선 OA의 방정식은 $y = \frac{y_1}{x_1}x$

$\therefore\ y_1x - x_1y = 0$

점 B(x_2, y_2)에서

직선 $y_1x - x_1y = 0$까지의 거리 h는

$\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$이다.

$\therefore\ \triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot h$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$

$= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

7. $A(0,-2), B(3,3), C(4,0)$ 인 $\triangle ABC$ 의 넓이는?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$\overline{BC} = \sqrt{(4-3)^2+(0-3)^2} = \sqrt{10}$

또, 직선 BC 의 방정식은 $3x+y-12=0$ 이므로

$A(0,-2)$ 로부터 직선 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{AH} = \frac{|-2-12|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{14}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AH} = 7$$

8. 원 $x^2+y^2+4x-2y+2=0$과 중심이 같고 점 $(2,\ 3)$을 지나는 원의 넓이는?

① 12π ② 14π ③ 16π ④ 18π ⑤ 20π

해설

$x^2+y^2+4x-2y+2=0$을 변형하면
$(x+2)^2+(y-1)^2=3$이므로
원의 중심의 좌표는 $(-2,\ 1)$
따라서, 중심이 $(-2,\ 1)$이고
반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y-1)^2=r^2$이고,
이 원이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로
$r=\sqrt{(2+2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5}$
따라서, 이 원의 넓이는 $\pi r^2=20\pi$

9. 두 점 $A(1,\ 2)$, $B(-1,\ 4)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y-4)^2=4$

② $(x+1)^2+(y-2)^2=8$

③ $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

④ $x^2+(y-3)^2=2$

⑤ $x^2+y^2=2$

해설

원의 중심 : $\left(\dfrac{1+(-1)}{2},\ \dfrac{2+4}{2}\right)=(0,\ 3)$

반지름 : $\dfrac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}$

∴ 원의 방정식 : $x^2+(y-3)^2=(\sqrt{2})^2$

10. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$ ② $c^2 = b$ ③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$ ⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은 $x = 0$ 으로부터

$y^2 + 2by + c = 0$

y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

11. x 축에 접하고 두 점 $(3,1)$, $(-4,8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2+(y-12)^2=169$ ② $x^2+(y-5)^2=169$

③ $x^2+(y-5)^2=25$ ④ $(x-8)^2+(y-13)^2=169$

⑤ $(x-8)^2+(y-13)^2=25$

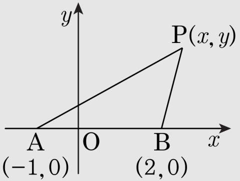
해설

구하는 원의 중심을 (a,b) 라고 하면
x 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
이 원이 두 점 $(3,1)$, $(-4,8)$ 을 지나므로
$(3-a)^2+(1-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉠
$(-4-a)^2+(8-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ $-$ ㉡에서
$b=a+5 \cdots\cdots$ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$a^2-8a=a(a-8)=0$
$\therefore\ a=0$ 또는 $a=8$
㉢에서 $a=0$ 일 때 $b=5$, $a=8$ 일 때 $b=13$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+(y-5)^2=5^2$
또는$(x-8)^2+(y-13)^2=13^2$

12. 두 점 $A(-1,\ 0), B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

해설



조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$\therefore\ 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

그런데 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$4\left\{(x-2)^2 + y^2\right\} = \left\{(x+1)^2 + y^2\right\}$

정리하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

따라서 원의 반지름은 2 이다.

13. 반지름의 길이가 5 cm, 8 cm 인 두 원의 중심거리가 3 cm 일 때, 두 원의 위치관계는?

① 한 원이 다른 원의 외부에 있다.

② 두 원이 외접한다.

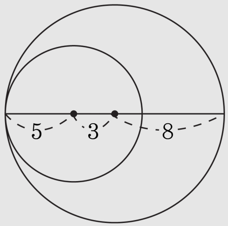
③ 두 원이 두 점에서 만난다.

④ 두 원이 내접한다.

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

해설

반지름이 5 인 원이 반지름이 8 인 원 안에 내접한다.



14. 두 원 O와 O′의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

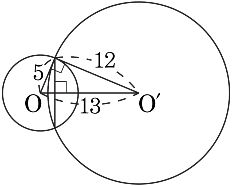
① $\frac{60}{13}$ ② $\frac{90}{13}$ ③ $\frac{120}{13}$ ④ $\frac{150}{13}$ ⑤ $\frac{180}{13}$

해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면 $\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2}\times 5\times 12=\frac{1}{2}\times 13\times \frac{x}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{120}{13}$$



15. 원 $x^2 + y^2 = 8$과 직선 $y = x + k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < 2$ ② $0 < k < 4$ ③ $-4 < k < 0$

④ $-2 < k < 0$ ⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d를 구하면

$$d = \frac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore\ -4 < k < 4$$

16. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 3　　⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$

$\therefore\ k=5$

17. $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = x \pm \sqrt{5}$ ② $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$ ③ $y = 4x \pm 2\sqrt{5}$

④ $y = 5x \pm 5\sqrt{5}$ ⑤ $y = x \pm 2\sqrt{5}$

해설

구하는 접선의 방정식은

$y = 2x \pm 3\sqrt{1 + 2^2} \quad \leftarrow \quad m = 2, r = 3$

$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$

18. 평행이동 $f : (x, y) \to (x+a,\ x+b)$ 에 의해 점 $(1, 2)$ 가 점 $(-1, 4)$ 으로 옮겨질 때, 평행이동 f 에 의해 원점으로 옮겨지는 점의 좌표는?

① $(2, -2)$ ② $(2, 2)$ ③ $(2, 0)$
④ $(-2, 2)$ ⑤ $(4, 2)$

해설

$(1 + a, 2 + b) = (-1, 4)$
$\Rightarrow \quad a = -2, \quad b = 2$
$\therefore \quad (x + 2, y + 2) = (0, 0)$
$\Rightarrow \quad x = 2, \quad y = -2$
$\Rightarrow \quad (2, -2)$

19. 평행이동 $f\ :\ (x,\ y) \to (x+1,\ y-2)$에 의하여 점$(3,\ 3)$은 어느 점에서 옮겨진 것인가?

① $(0,\ 0)$ ② $(3,\ 3)$ ③ $(1,-2)$

④ $(-1,\ 2)$ ⑤ $(2,\ 5)$

해설

평행이동 f는 x축의 방향으로 $+1$, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 변환이므로 $(a+1,\ b-2)=(3,\ 3)$ 따라서 $a=2,\ b=5$

20. 원 $x^2+y^2-6x+8=0$ 을 점 (2, 1) 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y+2)^2=4$
② $(x+1)^2+(y-2)^2=4$
③ $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
④ $(x-1)^2+(y-2)^2=1$
⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

해설

원 $x^2+y^2-6x+8=0$은 중심이 $(3,\ 0)$ 이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
원의 중심 $(3,\ 0)$ 을 점 $(2,\ 1)$ 에 대하여
대칭이동한 점을 $(a,\ b)$ 라 하면

$$\frac{3+a}{2}=2,\quad \frac{0+b}{2}=1$$

$\therefore\ a=1,\ b=2$
원을 대칭이동하여도 반지름의 길이는
그대로이므로 구하는 원은 중심이 $(1,\ 2)$ 이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
$\therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2=1$