

1. 다음 이차함수 중 최댓값이 3 인 것은?

① $y = 2(x-1)^2 + 3$

② $y = -x^2 + x + 3$

③ $y = -(x-3)^2 + 1$

④ $y = -3(x+2)^2 + 3$

⑤ $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 - 3$

해설

이차항의 계수가 음수이면서 꼭짓점의 y 좌표가 3 인 것을 찾는다.

2. 이차함수 $y = -x^2 + 10x - 13$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$y = -x^2 + 10x - 13 = -(x-5)^2 + 12$$

$$\text{최댓값 } m = 12$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{최솟값 } n = \frac{1}{2}$$

$$\therefore mn = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

3. 이차함수 $y = -x^2 - 2x + 7$ ($-3 \leq x \leq 1$)의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 4 ② 7 ③ 8 ④ 11 ⑤ 12

해설

$y = -x^2 - 2x + 7 = -(x + 1)^2 + 8$ 이므로
꼭짓점의 좌표는 $(-1, 8)$ 이고, 위로 볼록한 포물선이다.
주어진 구간의 양 끝값을 구하면,
 $x = -3$ 일 때 $y = -(-3 + 1)^2 + 8 = 4$
 $x = 1$ 일 때 $y = -(1 + 1)^2 + 8 = 4$ 이다.
따라서 최댓값 $a = 8$ 이고, 최솟값 $b = 4$ 이므로 $a + b = 12$

4. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = -x^2 + 4x \quad (1 \leq x \leq 5)$$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 최댓값 4

▷ 정답: 최솟값 -5

해설

$$y = -x^2 + 4x = -(x - 2)^2 + 4$$

꼭짓점: $x = 2$ 일 때 $y = 4$

$$\text{양끝점: } \begin{cases} x = 1 \text{ 일 때 } y = 3 \\ x = 5 \text{ 일 때 } y = -5 \end{cases}$$

$x = 2$ 에서 최댓값 4

$x = 5$ 에서 최솟값 -5

5. $-2 \leq x \leq 3$ 에서 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ① 3 ② 7 ③ -2 ④ 0 ⑤ 1

해설

$y = (x - 1)^2 - 3$ 이고 꼭짓점의 x 좌표가 주어진 x 의 범위에 포함되므로

$x = 1$ 에서 최솟값을 $x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$(\text{최댓값}) = (-2)^2 - 2(-2) - 2 = 6$$

$$(\text{최솟값}) = -3$$

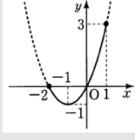
6. $-2 \leq x \leq 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \leq x \leq 1$ 에서
 $y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.
즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$
따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,
 $x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
구하는 합은 $3 - 1 = 2$



7. 이차함수 $y = -2 + 3x - x^2$ ($-1 \leq x \leq 2$)의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ① $-\frac{23}{4}$ ② $-\frac{16}{3}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$$y = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$x = \frac{3}{2}$ 가 x 의 값의 범위 $-1 \leq x \leq 2$ 에 포함되므로

$x = \frac{3}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$ 를 갖고,

$x = -1$ 에서 최댓값 -6 을 갖는다.

따라서 최솟값과 최댓값의 합은 $-\frac{23}{4}$ 이다.

8. 함수 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$ 가 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 최댓값 5, 최솟값 -4를 가질 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이고 $a < 0$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = ax^2 - 2ax + b$
 $= a(x-1)^2 - a + b$ 에서 $a < 0$ 이고
꼭짓점의 x 좌표 1이 $-2 \leq x \leq 2$ 에 속하므로
 $x = 1$ 일 때 최댓값을 갖고,
 $x = -2$ 일 때 최솟값을 갖는다.
즉, $f(1) = -a + b = 5$, $f(-2) = 8a + b = -4$
두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 4$
 $\therefore a + b = 3$

9. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x - 2a$ 의 최솟값이 1 일 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f(x) = x^2 - 4x - 2a = (x-2)^2 - 2a - 4$$

이 때, 꼭짓점의 x 좌표 2 가 $-1 \leq x \leq 1$ 에 속하지 않으므로

$f(-1), f(1)$ 중 작은 값이 최솟값이다.

따라서, 최솟값은 $f(1) = -3 - 2a = 1$

$\therefore a = -2$

10. $-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = -x^2 + 4x + k$ 의 최댓값이 6 일 때, 최솟값은?

- ① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

해설

$y = -x^2 + 4x + k = -(x-2)^2 + k + 4$ 이므로

$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 $k + 4$ 이다.

따라서 $k + 4 = 6$ 에서 $k = 2$

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 $y = -(x-2)^2 + 6$ 은 $x = -2$ 일 때 최솟값을 가지며, 최솟값은 -10 이다.

11. x 의 범위가 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x + a - 1$ 의 최소값이 1 이라 한다. 이 때, 이 함수의 최댓값은?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$y = x^2 - 2x + a - 1 = (x - 1)^2 + a - 2$$

정의역이 $-1 \leq x \leq 2$ 이므로

최솟값은 $x = 1$ 일 때 $a - 2$ 가 된다.

이 때, 최솟값이 1 이므로

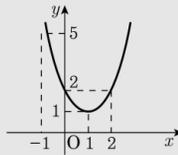
$$a - 2 = 1 \therefore a = 3$$

따라서 주어진 이차함수는 $y = (x - 1)^2 + 1$ 이고

그래프는 다음의 그림과 같으므로 최댓

값은

$x = -1$ 일 때 5 가 됨을 알 수 있다.



12. $0 \leq x \leq 3$ 에서 이차함수 $y = -4x^2 + 4x + a$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 10 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

- ① $\frac{11}{2}$ ② 11 ③ $\frac{33}{2}$ ④ 22 ⑤ $\frac{55}{2}$

해설

$$y = -4x^2 + 4x + a = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a + 1$$

$0 \leq x \leq 3$ 이므로 $x = \frac{1}{2}$ 일 때,

최댓값을 갖고 최댓값은 $a + 1$ 이다.

$x = 3$ 일 때, 최솟값을 갖고

최솟값은 $a - 24$ 이다.

최댓값과 최솟값의 합이 10 이므로

$$(a + 1) + (a - 24) = 10$$

$$\therefore a = \frac{33}{2}$$

13. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $|\alpha - \beta|$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -2a, \alpha\beta = -9 + 2a^2$
 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-2a)^2 - 4(-9 + 2a^2) = -4a^2 + 36$
그런데 $\frac{D}{4} = a^2 + 9 - 2a^2 \geq 0$
 $\therefore -3 \leq a \leq 3$
 $\therefore 0 \leq |\alpha - \beta|^2 \leq 36$
즉, $0 \leq |\alpha - \beta| \leq 6$
 \therefore (최댓값) + (최솟값) = $0 + 6 = 6$

14. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최소값은? (단, a 는 실수)

- ① 12 ② 9 ③ 6 ④ 3 ⑤ 2

해설

$x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -2a, \alpha\beta = 9 - 2a^2$
 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 8a^2 - 18$
또 α, β 는 실근이므로 $\frac{D}{4} = a^2 - (9 - 2a^2) \geq 0$
 $\therefore a^2 \geq 3$
따라서 $a^2 = 3$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 은 최소이고
최소값은 6 이다.

15. $x^2 - 5x + 6 < 0$ 일 때, $P = x^2 + 5x + 6$ 이 취할 수 없는 값은?

- ① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

해설

$$x^2 - 5x + 6 < 0, (x-2)(x-3) < 0 \quad \therefore 2 < x < 3$$

$$\text{이 때, } P = x^2 + 5x + 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$2 < x < 3$ 인 구간에서의 P 는 증가함수이다.

따라서 $P_{x=2} < P < P_{x=3}$ 이 성립한다.

$$P_{x=2} = 20, P_{x=3} = 30 \text{ 이므로 } 20 < P < 30$$

16. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x 의 범위가 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

- ① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow y = (x-1)^2 - 3$
 $-2 \leq x \leq 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
 $x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
 \therefore 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

17. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

- ① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

18. 이차함수 $y = -(x-2)(x+6)$ 의 최댓값을 a 라 하고 , 그 때의 x 의 값을 b 라 할 때, $a+b$ 을 값을 구하면?

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} y &= -(x-2)(x+6) \\ &= -(x^2 + 4x - 12) \\ &= -(x+2)^2 + 16 \end{aligned}$$

$x = -2$ 일 때, 최댓값 16 을 가지며 최솟값은 없다.
 $a = 16, b = -2$ 이므로 $a + b = 14$ 이다.

19. $y = ax^2 + bx + 8$ 의 그래프가 두 점 $(-2, 0)$, $(4, 0)$ 을 지나며, 최댓값 또는 최솟값이 c 일 때, $a - b + c$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

두 점 $(-2, 0)$, $(4, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 4a - 2b + 8, 2a - b = -4$$

$$0 = 16a + 4b + 8, 4a + b = -2$$

$$a = -1, b = 2$$

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 8 = -(x-1)^2 + 9$$

$x = 1$ 일 때, 최댓값 9, 즉 $c = 9$ 이다.

$$\therefore a - b + c = 6$$

20. 이차함수 $y = 2x^2 - 4x + 1 + k$ 의 최솟값이 4 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$y = 2x^2 - 4x + 1 + k = 2(x-1)^2 - 1 + k$$

최솟값이 4 이므로 $-1 + k = 4$

$$\therefore k = 5$$

21. 이차함수 $y = -2x^2 + bx + c$ 가 $x = 2$ 에서 최댓값 5를 가질 때, 상수 b, c 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $b = 8$

▷ 정답: $c = -3$

해설

꼭짓점의 좌표가 (2, 5) 이므로 이차함수의 식은 $y = -2(x-2)^2 + 5$ 이다.

$y = -2(x-2)^2 + 5$ 을 전개하면 $y = -2x^2 + 8x - 3$ 이므로 $b = 8, c = -3$ 이다.

22. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 는 한 점 $(-2, -5)$ 을 지나고, $x = m$ 일 때 최솟값 $2m$ 을 갖는다. m 의 값을 구하면?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y = x^2 + ax + b$ 의 꼭짓점의 좌표가 $(m, 2m)$ 이므로
 $y = (x - m)^2 + 2m$ 에 $(-2, -5)$ 를 대입한다.

$$-5 = (-2 - m)^2 + 2m$$

$$m^2 + 6m + 9 = 0$$

$$(m + 3)^2 = 0$$

따라서 $m = -3$ 이다.

23. $-1 \leq x \leq 2$ 에서 이차함수 $f(x) = -x^2 + 2x + k$ 의 최댓값이 3 일 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$f(x) = -x^2 + 2x + k = -(x-1)^2 + k + 1$$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는

$x = 1$ 일 때, 최대이고

최댓값은 $k + 1$ 이므로 $k + 1 = 3$

$$\therefore k = 2$$

따라서, $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ 이므로

$x = 1$ 일 때 최댓값 3을 갖는다.

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(-1) = -1, f(2) = 2$

이므로 최소는 $x = -1$ 일 때, 최솟값

-1을 갖는다.

24. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3 \\ &= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2 \end{aligned}$$

따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$
 $g(a) = -(a-2)^2 + 6$ 에서
 $g(a)$ 의 최댓값은 6 이다.

25. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x+a)^2 + a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = -a$ 일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$ 를 가진다.
 $\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a+2)^2 - 8$
따라서 M 은 $a = -2$ 일 때 최댓값 -8 을 가진다.

26. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -40

해설

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t \text{ 라 하면}$$

$$x = 2t - 1, y = 5t + 3, z = 3t - 2 \text{ 이므로}$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = (2t-1)^2 - (5t+3)^2 + (3t-2)^2 = -12t^2 - 46t - 4$$

... ㉠

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$t \geq \frac{1}{2}, t \geq -\frac{3}{5}, t \geq \frac{2}{3}$$

$$\therefore t \geq \frac{2}{3}$$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$$t = \frac{2}{3} \text{ 일 때 최대이고 최댓값은}$$

$$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$$

27. 함수 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 3) + 3x^2 - 6x$ 의 최솟값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + 2 = t$ 로 놓으면

$t = (x-1)^2 + 1 \geq 1$ 이고

$f(x) = g(t) = t(t+1) + 3t - 6$

$= t^2 + 4t - 6$

$= (t+2)^2 - 10 \quad (t \geq 1)$

따라서 구하는 최솟값은

$g(1) = (1+2)^2 - 10 = -1$

28. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면
 $y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots \textcircled{1}$
또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로
 $t \geq 2 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 의 범위에서 $\textcircled{1}$ 의 최솟값은
 $t = 2$ 일 때 1이다.

29. 함수 $y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$ 이 $x = m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$ 에서
 $x^2 + 4x + 5 = t$ 로 놓으면
 $y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) + 4$
 $= -t^2 - 2t + 4 = -(t + 1)^2 + 5$
그런데 $t = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 \geq 1$ 이므로
 $t = 1$, 즉 $x = -2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.
따라서, $m = -2$, $M = 1$
 $\therefore M + m = -1$

30. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = (x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

- ① 18 ② 9 ③ 7 ④ -9 ⑤ -18

해설

$(x^2 - 2x + 2) = t$ 로 치환하면,

$$t^2 - 4t + 1 = (t - 2)^2 - 3 .$$

t 의 범위는 x 에 의해 $1 \leq t \leq 5$ 가 된다.

$$\begin{cases} t = 2 \text{일때, } y = -3 \\ t = 5 \text{일때, } y = 6 \end{cases}$$

$$\therefore M \times m = -18$$

31. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = (x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x^2 + 2x = t$ 로 놓으면, $t = (x+1)^2 - 1$ 이므로
 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $-1 \leq t \leq 3$
이 때, 주어진 함수는 $y = t^2 - 4t + 2 = (t-2)^2 - 2$
즉, $t = 2$ 일 때, y 의 최솟값은 -2 이고,
 $t = -1$ 일 때, y 의 최댓값은 7 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

32. 함수 $f(x) = (x^2 - 4x + 2)^2 - 4(x^2 - 4x + 2)$ 일 때, $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$$f(x) = (x^2 - 4x + 2)^2 - 4(x^2 - 4x + 2)$$

$$t = x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2 \text{라 하면}$$

$$0 \leq x \leq 3 \text{에서 } -2 \leq t \leq 2$$

$$f(t) = t^2 - 4t = (t - 2)^2 - 4$$

$$\therefore -2 \leq t \leq 2 \text{에서 } -4 \leq f(t) \leq 12$$

따라서 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 -4이다.

33. x, y 가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7 \\ &= (x-3)^2 + 2(y+1)^2 - 4 \text{ 이므로} \\ & x=3, y=-1 \text{ 일 때, 최솟값 } -4 \text{ 를 갖는다.} \end{aligned}$$

34. x, y 가 실수일 때, $-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12$ 의 최댓값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 = -(x+2)^2 - (y-3)^2 + 1$$

이 때, x, y 가 실수이므로

$$(x+2)^2 \geq 0, (y-3)^2 \geq 0$$

$$\therefore -x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 \leq 1$$

따라서 $x = -2, y = 3$ 일 때

주어진 식의 최댓값은 1이다.

35. x, y 가 실수일 때, $2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6$ 의 최솟값은?

- ① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6 \\ &= 2(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) + 6 \\ &= 2(x-2)^2 + (y+1)^2 - 3 \\ & x, y \text{ 는 실수이므로 } (x-2)^2 \geq 0, (y+1)^2 \geq 0 \\ & \therefore 2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6 \geq -3 \\ & \text{따라서, } x=2, y=-1 \text{ 일 때 최솟값은 } -3 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

36. x, y, z 가 실수일 때, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$ 의 최솟값은?

- ① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \\ &= (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 - 1 \end{aligned}$$

이 때, x, y, z 가 실수이므로
 $(x+1)^2 \geq 0, (y-3)^2 \geq 0, (z-4)^2 \geq 0$
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \geq -1$
따라서 $x = -1, y = 3, z = 4$ 일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1 이다.

37. 실수 x 에 대하여 함수 $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3}$ 의 함수값 중 가장 작은 정수를 m , 가장 큰 정수를 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값은?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3} = y \text{라 놓고,}$$

양변에 $x^2 + 2x + 3$ 을 곱하면

$$2x^2 - 4x + 1 = y(x^2 + 2x + 3)$$

$$(y - 2)x^2 + 2(y + 2)x + 3y - 1 = 0$$

x 가 실수이므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (y + 2)^2 - (y - 2)(3y - 1) \geq 0$$

$$2y^2 - 11y - 2 \leq 0$$

$$\therefore \frac{11 - \sqrt{137}}{4} \leq y \leq \frac{11 + \sqrt{137}}{4}$$

$$11 < \sqrt{137} < 12 \text{이므로}$$

$$-0. \times \times \times \leq y \leq 5. \times \times \times$$

따라서 $m = 0, M = 5$ 이므로 $m + M = 5$

38. 둘레의 길이가 48m 인 직사각형 중 그 넓이가 가장 넓을 때의 넓이를 구하면?

① 81m^2

② 100m^2

③ 121m^2

④ 144m^2

⑤ 169m^2

해설

가로의 길이를 $x\text{m}$, 세로의 길이를 $(24-x)\text{m}$, 넓이를 $y\text{m}^2$ 라 하면

$$\begin{aligned}y &= x(24-x) \\ &= -x^2 + 24x \\ &= -(x^2 - 24x + 144 - 144) \\ &= -(x-12)^2 + 144\end{aligned}$$

따라서 $x = 12$ 일 때 넓이의 최댓값은 144m^2 이다.

39. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값은?

- ㉠ $-\frac{7}{8}$ ㉡ -1 ㉢ $\frac{1}{8}$ ㉣ 1 ㉤ $-\frac{9}{8}$

해설

$$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$$

$$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8} \text{ 이므로 } m \text{ 의 최댓값은 } -\frac{7}{8} \text{ 이다.}$$

40. 이차함수 $y = -x^2 + 2ax - 6a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$$y = -x^2 + 2ax + 6a = -(x-a)^2 + a^2 + 6a$$

$$\therefore M = a^2 + 6a = (a+3)^2 - 9$$

따라서 M 의 최솟값은 -9 이다.

41. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 6a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -9

해설

$$y = -x^2 - 2ax + 6a = -(x+a)^2 + a^2 + 6a$$

$$\therefore M = a^2 + 6a = (a+3)^2 - 9$$

따라서 M 의 최솟값은 -9 이다.

42. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2a - 5$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2ax - 2a - 5 \\ &= (x - a)^2 - a^2 - 2a - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \text{의 최솟값} : m &= -a^2 - 2a - 5 \\ &= -(a + 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

$$m \text{의 최댓값} : -4$$

43. $2x^2 + y^2 = 8$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $4x + y^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$2x^2 + y^2 = 8$ 에서

$y^2 = 8 - 2x^2$ 으로 놓으면

$y^2 = 8 - 2x^2 \geq 0, x^2 - 4 \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 2$

이 때, $y^2 = 8 - 2x^2$ 을 $4x + y^2$ 에 대입하면

$4x + y^2 = 4x + (8 - 2x^2) = -2(x - 1)^2 + 10$

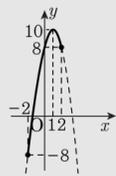
여기서 $f(x) = 4x + y^2 = -2(x - 1)^2 + 10$

이라고 하면 $-2 \leq x \leq 2$ 이므로

다음 그림에서 $x = 1$ 일 때

$f(x)$ 의 최댓값은 10

$x = -2$ 일 때 $f(x)$ 의 최솟값은 $-2(-2 - 1)^2 + 10 = -8$



따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + (-8) = 2$

44. 실수 x, y 가 $x^2 - y^2 = 4$ 를 만족할 때, $2x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$x^2 - y^2 = 4 \text{ 에서 } y^2 = x^2 - 4 \dots\dots \textcircled{1}$$

이 때, $y^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 - 4 \geq 0$

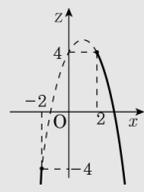
$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2$$

$$2x - y^2 = 2x - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 4$$

$$= -(x-1)^2 + 5$$

$f(x) = -(x-1)^2 + 5$ 로 놓으면

$x \leq -2, x \geq 2$ 에서 함수 $z = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값은 4 이다.

45. $x^2 + 2y^2 = 4$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $4x + 2y^2$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + m$ 의 값은?

- ① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x^2 + 2y^2 = 4$ 에서 $2y^2 = 4 - x^2$
이때, y 는 실수이므로 $2y^2 = 4 - x^2 \geq 0$
 $\therefore -2 \leq x \leq 2$
 $4x + 2y^2 = 4x + 4 - x^2 = -(x-2)^2 + 8$
($-2 \leq x \leq 2$)
따라서 $x = -2$ 일 때, 최솟값 $m = -8$ 이고,
 $x = 2$ 일 때, 최댓값 $M = 8$ 이므로 $M + m = 0$

46. $x^2 + y^2 = 4$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $2y + x^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2 + y^2 = 4$ 에서 $x^2 = 4 - y^2$
 x, y 가 실수이므로
 $x^2 = 4 - y^2 \geq 0, y^2 \leq 4$
 $\therefore -2 \leq y \leq 2$
 $2y + x^2$ 에 $x^2 = 4 - y^2$ 을 대입하면
 $2y + x^2 = 2y + (4 - y^2)$
 $= -y^2 + 2y + 4 = -(y - 1)^2 + 5$
이 때, $-2 \leq y \leq 2$ 이므로 $y = 1$ 일 때
최댓값은 5, $y = -2$ 일 때 최솟값은 -4 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $5 + (-4) = 1$

47. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$$

$$y^2 + y - 6 \leq 0, (y + 3)(y - 2) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

48. $x^2 - xy + y^2 + 2y = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

- ㉠ $\frac{2}{3}$ ㉡ 1 ㉢ 2 ㉣ $\frac{11}{5}$ ㉤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$$y^2 + (2-x)y + x^2 = 0$$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$$D = (2-x)^2 - 4 \cdot x^2 \geq 0,$$

$$3x^2 + 4x - 4 \leq 0, (x+2)(3x-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

49. x 가 실수일 때, $x^2 + 4y^2 - 8x + 16y - 4 = 0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면
 $x^2 - 8x + 4y^2 + 16y - 4 = 0$
이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때
 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
 $\therefore D/4 = (-4)^2 - (4y^2 + 16y - 4) \geq 0$
 $\rightarrow 4y^2 + 16y - 20 \leq 0$
 $\rightarrow y^2 + 4y - 5 \leq 0$
 $\rightarrow (y + 5)(y - 1) \leq 0$
 $\therefore -5 \leq y \leq 1$
 $\therefore y$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 -5

50. x 가 실수일 때, $f(x) = (x^2 + 4x + 6)(x^2 + 4x + 2) + 2x^2 + 8x + 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$t = x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 2 \geq -2$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= g(t) = (t + 4)t + 2t + 6 \\ &= t^2 + 6t + 6 = (t + 3)^2 - 3 \end{aligned}$$

$$\therefore g(t) \text{ 는 } t = -2 \text{ 일 때, 최솟값 } -2 (\because t \geq -2)$$