

1. 세 수 $A = 3\sqrt{3} - 1$, $B = \sqrt{3} + 2$, $C = 2\sqrt{3} + 1$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C < B < A$

② $A < B < C$

③ $A < C < B$

④ $B < A < C$

⑤ $B < C < A$

해설

i) $A - B = (3\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 2)$
 $= 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0$
 $\therefore A > B$

ii) $B - C = (\sqrt{3} + 2) - (2\sqrt{3} + 1)$
 $= 1 - \sqrt{3} < 0$
 $\therefore B < C$

iii) $C - A = (2\sqrt{3} + 1) - (3\sqrt{3} - 1)$
 $= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0$
 $\therefore C > A$

따라서 $B < A < C$

2. 두 양수 a, b 에 대하여 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

a, b 는 양수이므로

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab}$$

$$= 5 + ab + \frac{4}{ab} \geq 5 + 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}}$$

$$= 5 + 4 = 9$$

$\therefore$ 최솟값은 9

3. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(x + \frac{1}{2y}\right)\left(8y + \frac{1}{x}\right)$ 의 최솟값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{2y}\right)\left(8y + \frac{1}{x}\right) &= 8xy + \frac{1}{2xy} + 5 \\ &\geq 2\sqrt{8xy \times \frac{1}{2xy}} + 5 \\ &= 4 + 5 = 9\end{aligned}$$

4. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값 M , 최솟값 m 의 합 $M + m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해
 $(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$
 $(x + 2y)^2 \leq 5 \cdot 5$
 $\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5$ 이므로
 $x + 2y$ 의 최댓값 $M = 5$, 최솟값 $m = -5$
 $\therefore M + m = 5 + (-5) = 0$

5. $a > b > 0$ 일 때, $a^2 > b^2$ 이다. 임을 이용하여 $x > y > -1$ 일 때, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{y+1}$ 의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$

② $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{y+1}$

③ $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$

④ $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{y+1}$

⑤ $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 &= (x+1) - (y+1) \\ &= x - y > 0\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$$

6. n 이 자연수 일 때, 2^{10n} , 1000^n 의 대소를 비교하면?

- ① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$
④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0$, $1000^n > 0$ 이고, n 이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$$\therefore 2^{10n} > 1000^n$$

7. $x > 3$ 일 때 $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3

② 5

③ 12

④ 15

⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때, $x > 3$ 이므로 $3(x-3) > 0$, $\frac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$\begin{aligned} & 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11 \\ & \geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11 \\ & = 2 \cdot 3 + 11 = 17 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

8. a, b, x, y 가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$ 일 때 $ax + by$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

해설

a, b, x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
 $8 \times 2 \geq (ax + by)^2$
 $\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$
(최댓값) $\times$ (최솟값) = -16

9. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

- ㉠ $|a| = -a$
- ㉡ $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.
- ㉢ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.
- ㉣ $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ㉤ $|a - b| \geq |a| - |b|$

해설

- ㉠ $|a| = a(a \geq 0)$
 $-a(a < 0)$
- ㉡ 참
- ㉢ 참
- ㉣ $(|a + b + c|)^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
 $(|a| + |b| + |c|)^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(|a||b| + |b||c| + |c||a|)$
 $|a||b| \geq ab, |b||c| \geq bc, |c||a| \geq ca$
 $\therefore |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ㉤ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2 (\because |a||b| \geq ab)$
 $\therefore |a - b| \geq |a| - |b|$

10. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계를 이용하면

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1$$

$$= \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + 2 \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2 = 4$$

11. $a > 0, b > 0, a + b = 4$ 일 때, ab 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0, b > 0$ 일 때,
 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 이므로
 $a + b = 4 \geq 2\sqrt{ab}, 0 \leq ab \leq 4$
따라서 ab 의 최댓값은 4

12. 길이가 16m인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① 8 m^2 ② 16 m^2 ③ 25 m^2 ④ 36 m^2 ⑤ 64 m^2

해설

가로를 x , 세로를 y 라 하자.

$$2(x+y)=16 \quad x+y=8$$

산술기하평균을 사용하면,

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$4 \geq \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow 16 \geq xy$$

$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\text{m}^2)$

13. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x , 높이를 y 라 하면

$$xy = 8 \cdots \text{㉠}$$

피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 이다.

$x > 0, y > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{16} = 4$$

단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$ 일 때 성립한다.

$x = y$ 를 ㉠에 대입하면 $x^2 = 8$

따라서 $x = 2\sqrt{2}$ 이다.

$$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

14. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로 $100 \geq (x + 3y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
 $\therefore M = 10, m = -10$
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$

15. 양수 a, b 가 $a+b=1$ 을 만족시킬 때, 두 수 $P=a^3+b^3, Q=a^2+b^2$ 의 대소로 비교로 바른 것은?

① $P > Q$

② $P \geq Q$

③ $P = Q$

④ $P < Q$

⑤ $P \leq Q$

해설

a, b 는 양수이고 $a+b=1$ 이므로

$$0 < a < 1, 0 < b < 1$$

또 $b=1-a$ 이므로

$$P = a^3 + b^3 = a^3 + (1-a)^3$$

$$= a^3 + 1 - 3a + 3a^2 - a^3$$

$$= 3a^2 - 3a + 1$$

$$Q = a^2 + b^2 = a^2 + (1-a)^2$$

$$= a^2 + a^2 - 2a + 1$$

$$= 2a^2 - 2a + 1$$

$$P - Q = 3a^2 - 3a + 1 - 2a^2 + 2a - 1$$

$$= a^2 - a = a(a-1)$$

그런데 $0 < a < 1$ 이므로 $a(a-1) < 0$

$\therefore P - Q < 0$ 이고 $P < Q$