1. 세 수 $A=3\sqrt{3}-1,\ B=\sqrt{3}+2,\ C=2\sqrt{3}+1$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C<B<A$　② $A<B<C$　③ $A<C<B$

④ $B<A<C$　⑤ $B<C<A$

해설

i) $A-B=(3\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+2)$
$=2\sqrt{3}-3=\sqrt{12}-\sqrt{9}>0$
$\therefore A>B$

ii) $B-C=(\sqrt{3}+2)-(2\sqrt{3}+1)$
$=1-\sqrt{3}<0$
$\therefore B<C$

iii) $C-A=(2\sqrt{3}+1)-(3\sqrt{3}-1)$
$=2-\sqrt{3}=\sqrt{4}-\sqrt{3}>0$
$\therefore C>A$

따라서 $B<A<C$

2. 두 양수 a, b에 대하여 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$의 최솟값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

a, b는 양수이므로

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+4+1+\frac{4}{ab}$$

$$=5+ab+\frac{4}{ab}\geq 5+2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}$$

$$=5+4=9$$

$\therefore$ 최솟값은 9

3. $x > 0,\ y > 0$일 때, $\left(x + \frac{1}{2y}\right)\left(8y + \frac{1}{x}\right)$의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\left(x + \frac{1}{2y}\right)\left(8y + \frac{1}{x}\right) = 8xy + \frac{1}{2xy} + 5$$
$$\geq 2\sqrt{8xy \times \frac{1}{2xy}} + 5$$
$$= 4 + 5 = 9$$

4. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값 M, 최솟값 m의 합 $M+m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$(x+2y)^2 \leq 5 \cdot 5$

$\therefore -5 \leq x+2y \leq 5$이므로

$x+2y$의 최댓값 $M=5$, 최솟값 $m=-5$

$\therefore\ M+n=5+(-5)=0$

5. $a > b > 0$ 일 때, $a^2 > b^2$ 이다. 임을 이용하여 $x > y > -1$ 일 때, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{y+1}$ 의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$ ② $\sqrt{x+1} \le \sqrt{y+1}$

③ $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$ ④ $\sqrt{x+1} \ge \sqrt{y+1}$

⑤ $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 &= (x+1) - (y+1) \\ &= x - y > 0\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$

6. n이 자연수 일 때, $2^{10n}, 1000^n$ 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$

④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0,\ 1000^n > 0$ 이고, n이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$\therefore 2^{10n} > 1000^n$

7. $x > 3$일 때 $\dfrac{3}{x-3} + 2 + 3x$의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때, $x > 3$이므로 $3(x-3) > 0$, $\dfrac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$
$$\geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11$$
$$= 2 \cdot 3 + 11 = 17$$

(단, 등호는 $3(x-3) = \dfrac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

8. a, b, x y가 실수이고, $a^2+b^2=8, x^2+y^2=2$일 때 $ax+by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$8 \times 2 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -4 \leq ax+by \leq 4$
(최댓값) $\times$(최솟값)$= -16$

9. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $|a| = -a$

② $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.

③ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.

④ $|a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$

⑤ $|a-b| \geq |a| - |b|$

해설

① $|a| = a(a \geq 0)$

$\quad -a(a < 0)$

② 참

③ 참

④ $(|a+b+c|)^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$(|a| + |b| + |c|)^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(|a||b| + |b||c| + |c||a|)$

$|a||b| \geq ab, \ |b||c| \geq bc, \ |c||a| \geq ca$

$\therefore |a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$

⑤ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2 \ (\because |a||b| \geq ab)$

$\therefore |a-b| \geq |a| - |b|$

10. $a > 0$, $b > 0$일 때, $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0,\ b > 0$이므로 산술기하평균의 관계를 이용하면

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 1+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+1$$

$$= \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+2 \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2 = 4$$

11. $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 4$일 때, ab 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0$, $b > 0$일 때,
$a + b \geq 2\sqrt{ab}$이므로
$a + b = 4 \geq 2\sqrt{ab}$, $0 \leq ab \leq 4$
따라서 ab의 최댓값은 4

12. 길이가 16 m 인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① $8\,\mathrm{m}^2$ ② $16\,\mathrm{m}^2$ ③ $25\,\mathrm{m}^2$ ④ $36\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $64\,\mathrm{m}^2$

해설

가로를 x, 세로를 y라 하자.

$2(x+y)=16 \quad x+y=8$

산술기하평균을 사용하면,

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$4 \geq \sqrt{xy}$

$\Rightarrow \quad 16 \geq xy$

$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\mathrm{m}^2)$

13. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x, 높이를 y라 하면

$xy = 8 \cdots$ ㉠

피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2+y^2}$이다.

$x > 0,\ y > 0$이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$

$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{16} = 4$

단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$일 때 성립한다.

$x = y$를 ㉠에 대입하면 $x^2 = 8$

따라서 $x = 2\sqrt{2}$이다.

$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

14. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore \ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore \ M=10, \ m=-10$

$\therefore \ M-m=10-(-10)=20$

15. 양수 a, b가 $a+b=1$을 만족시킬 때, 두 수 $P=a^3+b^3$, $Q=a^2+b^2$의 대소로 비교로 바른 것은?

① $P > Q$ ② $P \geq Q$ ③ $P = Q$

④ $P < Q$ ⑤ $P \leq Q$

해설

a, b는 양수이고 $a+b=1$이므로

$0 < a < 1$, $0 < b < 1$

또 $b = 1-a$이므로

$$P = a^3+b^3 = a^3+(1-a)^3$$
$$= a^3+1-3a+3a^2-a^3$$
$$= 3a^2-3a+1$$
$$Q = a^2+b^2 = a^2+(1-a)^2$$
$$= a^2+a^2-2a+1$$
$$= 2a^2-2a+1$$
$$P-Q = 3a^2-3a+1-2a^2+2a-1$$
$$= a^2-a = a(a-1)$$

그런데 $0 < a < 1$이므로 $a(a-1) < 0$

$\therefore P-Q < 0$이고 $P < Q$