

1. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A \subset B$ 이다. 다음 중 $A \subset C$ 가 되는 경우는?
- ① $B = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}, C = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 짝수}\}$
 - ② $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}, C = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 배수}\}$
 - ③ $B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 홀수}\}, C = \{x \mid x \text{는 홀수}\}$
 - ④ $A = \{\emptyset\}, C = \emptyset$
 - ⑤ $A = \{1, 3, 5, 7\}, C = \{1, 5, 9, 11\}$

해설

$A \subset B$ 이므로, $B \subset C$ 일 때, $A \subset C$ 의 포함 관계가 성립한다.

① $B = \{1, 2, 4, 8\}, C = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로 포함 관계 없음.

② $A = \{6, 12, 18, \dots\}, C = \{12, 24, \dots\}$ 이므로 $C \subset A$

③ $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}, C = \{1, 3, 5, \dots\}$ 이므로 $B \subset C$

④ $A = \{\emptyset\}, C = \emptyset$ 이므로 $C \subset A$

⑤ $A = \{1, 3, 5, 7\}, C = \{1, 5, 9, 11\}$ 이므로 포함 관계 없음.

2. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } a \text{의 약수}\}$, $B = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, a 의 값은?

① 7 ② 14 ③ 28 ④ 32 ⑤ 56

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 는 $A = B$ 이다. 집합 B 는 28의 약수들의 모임이므로 $a = 28$ 이다.

3. 다음 중 옳은 것을 모두 골라라. (정답 2개)

- ① $A = \{\emptyset\}$ 이면 $n(A) = 0$
- ② $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $n(A) = n(B)$
- ③ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$
- ④ $n(A) = 0$ 이면 $A = \emptyset$
- ⑤ $n(A) = 0$, $n(B) \neq 0$ 이면 $B \subset A$ 이다.

해설

- ① $A = \{\emptyset\}$ 이면 집합 A 의 원소가 $\emptyset$ 이므로, $n(A) = 1$ 이다.
- ③ 예를 들어 $A = \{2, 3, 5\}$ 이고, $B = \{a, b, c, d, e\}$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이지만, $A \not\subset B$ 이다.
- ⑤ $A = \emptyset$ 이므로, 집합 A 의 부분집합은 $\emptyset$ 하나 밖에 없다.

4. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{ 이하의 짝수}\}$ 일 때, A 의 진부분집합을 모두 구한 것은?
- ① $\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}$
 - ② $\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}$
 - ③ $\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 4, 6\}$
 - ④ $\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}$
 - ⑤ $\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}$

해설

$A = \{2, 4, 6\}$
집합 $\{2, 4, 6\}$ 의 부분집합 :
 $\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}$
집합 $\{2, 4, 6\}$ 의 진부분집합 :
 $\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}$ 이므로 ⑤이다.

5. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 $A \cup \{3, 4, 5\} = U$, $A \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$ 을 만족하는 집합 A 의 진부분집합 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 31개

해설

조건 $A \cup \{3, 4, 5\} = U$ 에서 집합 A 는 원소 1, 2, 6, 7을 반드시 포함해야 한다.

또, 조건 $A \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$ 에서 집합 A 는 원소 3은 포함하고, 4, 5는 포함하지 않아야 한다.

따라서, 집합 A 의 진부분집합의 개수는

$$2^5 - 1 = 31(\text{개})$$

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 각각 공집합이 아닐 때, 항상 서로 소인 두 집합끼리 짝지은 것은?

① A 와 $A \cap B$

② $A - B$ 와 $A \cup B$

③ $A \cap B$ 와 $A \cup B$

④ $A^c \cap B$ 와 B

⑤ $A \cup B^c$ 와 $B - A$

해설

$B^c \cup A$ 은 $(B - A)^c$ 을 나타내는 것과 같으므로, 서로소인 집합이 된다.

7. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = \emptyset$ 의 관계가 성립하면, A 와 B 의 포함 관계는?

① $A \subset B$

② $B \subset A$

③ $A = B$

④ $A^c = B$

⑤ $A = B^c$

해설

$$A \cap B^c = A - B \text{ 이므로 } (B - A) \cup (A - B) = \emptyset$$

$$\therefore B - A = \emptyset, A - B = \emptyset \quad (\because (B - A) \text{와 } A - B \text{는 서로소})$$

$$\therefore B \subset A, A \subset B \text{ 즉 } A = B$$

8. 두 명제 「 $p \leftrightarrow q$ 」, 「 $r \rightarrow \sim q$ 」가 모두 참일 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ?

① $q \rightarrow \sim r$

② $p \rightarrow \sim r$

③ $q \leftrightarrow p$

④ $r \rightarrow p$

⑤ $r \rightarrow \sim p$

해설

- ① 어떤 명제가 참이면 그 대우는 반드시 참이므로 $r \rightarrow \sim q$ 이면 $q \rightarrow \sim r$ 이다.
- ② $p \rightarrow q$ 이고 $q \rightarrow \sim r$ 이면 $p \rightarrow \sim r$ (삼단논법)
- ③ $p \leftrightarrow q$ 이면 $q \leftrightarrow p$
- ④ 반드시 $r \leftrightarrow p$ 라고 말할 수는 없다.
- ⑤ 위의 ② 에서 $p \rightarrow \sim r$ 이면 $r \rightarrow \sim p$

9. 두 집합 P, Q 는 각각 조건 p, q 를 만족하는 원소들의 집합이고, 두 집합 P, Q 에 대하여 $P - (P - Q) = P$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?
- ① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 - ② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 - ③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
 - ④ p 는 q 이기 위한 충분조건 또는 필요조건이다.
 - ⑤ p 는 q 이기 위한 아무조건도 아니다.

해설

$$\begin{aligned} P - (P - Q) &= P - (P \cap Q^c) = P \cap (P \cap Q^c)^c \\ &= P \cap (P^c \cup Q) = (P \cap P^c) \cup (P \cap Q) = P \cap Q = P \text{ 이므로} \\ P &\subset Q \text{ 이고 } p \Rightarrow q \text{ 이므로 } p \text{ 는 } q \text{ 이기 위한 충분조건이다.} \end{aligned}$$

10. 세 조건 p, q, r 에 대하여 q 는 p 의 필요조건, q 는 r 의 충분조건이고 r 는 p 의 충분조건이다. 이 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요충분조건

해설

q 는 p 의 필요조건이므로 $p \Rightarrow q \dots\dots ㉠$
 q 는 r 의 충분조건이므로 $q \Rightarrow r \dots\dots ㉡$
 r 는 p 의 충분조건이므로 $r \Rightarrow p \dots\dots ㉢$
 $㉠, ㉡$ 에서 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로
 $p \Rightarrow r \dots\dots ㉣$
 $㉢, ㉣$ 에서 $r \Rightarrow p, p \Rightarrow r$ 이므로 $r \Leftrightarrow p$ 이다.
 $\therefore$ 필요충분조건

11. 다음은 $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ 임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다)에 들어갈 식 또는 기호가 순서대로 바르게 나열된 것을 고르면?

$$a > 0, b > 0 \text{ 일 때, } \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

(증명)

(가)

−

(나)

$$= (a + 2\sqrt{ab} + b) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$$
$$\therefore (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$$

그런데, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

(다)

 0,

$$\sqrt{a+b}$$

(다)

 0 이므로 $\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

- ① $\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a+b}, <$
- ② $\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a+b}, >$
- ③ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, (\sqrt{a+b})^2, <$
- ④ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, (\sqrt{a+b})^2, >$
- ⑤ $(\sqrt{a+b})^2, (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, >$

해설

양 변을 제곱하여 $a - b > 0$ 이면 $a > b$ 임을 이용한다.

12. 부등식 $3^{400} > 4^{100n}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$\frac{3^{400}}{4^{100n}} = \frac{(3^4)^{100}}{(4^n)^{100}} = \left(\frac{81}{4^n}\right)^{100} > 1$$

$$3^{400} > 4^{100n} \text{ 이므로 } \frac{81}{4^n} > 1$$

$$\therefore n = 1, 2, 3$$

따라서 자연수 n 의 개수는 3 개이다.

13. 다음은 수근이가 중학교에 입학한 첫 날의 일기이다. 밑 줄 친 말 중에서 집합이 될 수 있는 것을 모두 골라라.

5월 18일 비온 뒤 껌
오늘은 내가 중학교에 입학한 첫 날이다. 교복을 입은 내 모습이 어색해 보였지만, 새로 사귀게 될 ㉠ 멋진 친구들과 선생님을 만날 생각을 하니 기대가 되었다.
입학 첫 날이어서 그런지 부모님과 함께 온 학생들도 많았다. 나는 ㉡ 1학년 1반에 배정되었는데, ㉢ 6학년 때 같은 반이었던 친구들도 있었다.
선생님은 중학교 생활에 대하여 여러 가지 말씀을 하신 후, 자리를 정해 주셨다. 나는 ㉣ 키가 큰 편이어서 뒤쪽에 앉게 되었는데, 눈이 나빠서 칠판이 잘 보이지 않았다. 내일은 안경을 맞추어야겠다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

해설

‘멋진’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
‘큰’이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.

14. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cup B = B \cup A$

② $B \subset A$ 이면 $A \cap B = B$

③ $A \cap A = \emptyset$

④ $B \cap \emptyset = \emptyset$

⑤ $A \subset (A \cup B)$

해설

③ $A \cap A = A$

15. 다음 두 조건을 만족하는 집합 A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

$A \cap \{4, 8, 10, 12\} = \{4, 10\}$ $A \cup \{4, 8, 10, 12\} = \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 64개

해설

$A \cap \{4, 8, 10, 12\} = \{4, 10\}$ 에서 집합 A 는 원소 4, 10을 포함하고, 원소 8, 12는 포함하지 않는다.

또 $A \cup \{4, 8, 10, 12\} = \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$ 에서 집합 A 는 원소 5, 6, 9, 11을 포함한다.

$\therefore A = \{4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$

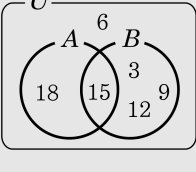
따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개)이다.

16. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 3\text{의 배수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A^c \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $B - A = \{3, 9, 12\}$, $A^c \cap B^c = \{6\}$ 일 때, $n(A)$ 는?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$U = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ 이다.
주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A = \{15, 18\}$ 이다.
따라서 $n(A) = 2$ 이다.



17. 집합 $A = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{d\}$ 일 때, 다음 중 집합 B 가 될 수 있는 것은?

① $B = \{a, b, c\}$

② $B = \{b, c, d\}$

③ $B = \{c, d, e\}$

④ $B = \{c, d, f\}$

⑤ $B = \{d, e, f\}$

해설

$A \cap B = \{d\}$ 이므로 집합 A, B 에 동시에 속하는 원소는 d 뿐이다.
따라서 집합 B 는 A 의 원소 중에서 a, b, c 는 포함하지 않고 d 만을 포함하고 있는 집합이므로 보기에서 조건을 만족하는 것은 $B = \{d, e, f\}$ 이다.

18. 세 집합 A, B, C 에 대하여
 $n(A) = 40, n(B) = 24, n(C) = 16, n(A \cup B) = 50, n(B \cap C) = 10, A \cap C = \emptyset$ 일 때,
 $n(A \cup B \cup C) + 2 \times n(A \cap B \cap C)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 56

해설

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$A \cap C = \emptyset$ 이므로 $A \cap B \cap C = \emptyset$ 이 된다.

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B) \text{ 이고}$$

$$A \cap B \cap C = \emptyset \text{ 이므로 } n(A \cap B) = 40 + 24 - 50 = 14$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C) = 40 + 24 + 16 - 14 - 10 - 0 + 0 = 56$$

따라서 정답은 $56 + 2 \times 0 = 56$

19. 축구를 좋아하는 학생이 21 명, 농구를 좋아하는 학생이 15 명, 축구와 농구를 모두 좋아하는 학생은 9 명, 모두 싫어하는 학생은 6 명이다. 이 때, 축구만 싫어하거나 농구를 좋아하는 학생은 모두 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 21 명

해설

$n(A) = 21, n(B) = 15, n(A \cap B) = 9, n((A \cup B)^c) = 6$ 이다.
 $n(A^c \cup B) = n(B) + n((A \cup B)^c) = 15 + 6 = 21$ 이다.

20. $a > 0, b > 0, c > 0, a^2 = b^2 + c^2, b + c \leq ka$ 를 만족하는 양의 상수 k 의 최솟값은?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

해설

$b + c \leq ka$ 에서 $b + c > 0$ 이므로
 $(b + c)^2 \leq k^2 a^2, (b + c)^2 \leq k^2(b^2 + c^2)$
그러므로 $(k^2 - 1)b^2 - 2bc + (k^2 - 1)c^2 \geq 0$
이 임의의 양수 b, c 에 대하여 성립할 조건은
 $k^2 - 1 > 0, D/4 = c^2 - (k^2 - 1)^2 c^2 \leq 0$
두 식에서 $k > 0$ 이므로 $k \geq \sqrt{2}$
따라서 k 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.