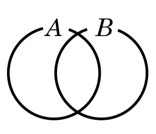
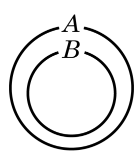
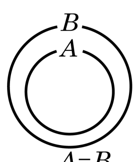
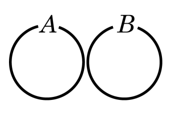
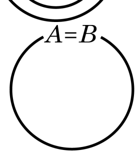
1. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{5$보다 작은 자연수$\}$ 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 옳게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$B = \{5$보다 작은 자연수$\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} = A$

2. 두 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, \cdots\}$, $B = \{x \mid x$는 a 의 배수$\}$에 대하여 $A = B$ 일 때, a의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 6　⑤ 8

해설

$A = B$이면 두 집합의 모든 원소가 같다. 집합 A를 조건제시법으로 나타내면,
$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, \cdots\} = \{x \mid x$는 2의 배수$\} = B$이다. 따라서 $a = 2$이다.

3. 다음 중 집합 $\{a,\ b,\ c\}$ 의 진부분집합이 아닌 것은?

① $\varnothing$ ② $\{c\}$ ③ $\{c,\ b,\ a\}$
④ $\{a,\ b\}$ ⑤ $\{b,\ c\}$

해설
$\{a,\ b,\ c\}$ 의 진부분집합은 $\{a,\ b,\ c\}$ 의 부분집합 중 $\{a,\ b,\ c\}$ 를 제외한 나머지 부분집합이다.
따라서 ③은 진부분집합이 아니다.

4. $A = \{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \}$ 에서 $a_1 \in X$, $a_2 \in X$, $a_5 \notin X$ 를 만족시키는 A 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 8 개

해설

a_1, a_2 는 속해있고 a_5 는 속해있지 않은 A 의 부분집합은 $\{a_3, a_4, a_6\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^{6-2-1} = 2^3 = 8$ (개)

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ 일 때, $A - B$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1, 5, 7\}$

해설

$A \cap B = \{2, 4, 8\}$ 이므로 $A - B = \{1, 5, 7\}$

6. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 일 때, $n(A \cup B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$ 이므로
원소의 개수 $n(A \cup B) = 6$ 이다.

7. 두 집합 $A=\{a-3,\ 4,\ 6\}$, $B=\{5,\ b+2,\ 8\}$ 에 대하여 $A\cap B=\{5,\ 6\}$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A\cap B=\{5,\ 6\}$ 이므로
$5\in A$ 이므로 $a-3=5\quad \therefore\ a=8$
$6\in B$ 이므로 $b+2=6\quad \therefore\ b=4$
$\therefore\ a-b=8-4=4$

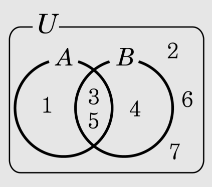
8. 전체집합 $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1,3,5\}$, $B = \{3,4,5\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = (\{1,3,4,5\})^c = \{2,6,7\}$ 이므로 원소의 합은 $2+6+7=15$ 이다.



9. 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여, $(A-B)^c-B$를 간단히 한 것을 다음 중 고르면?

① $(A \cup B)^c$　② $(A \cup B)$　③ $A \cap B^c$
④ $A^c \cup B$　⑤ $A^c \cup B^c$

해설

$(A-B)^c-B = (A \cap B^c)^c \cap B^c = (A^c \cup B) \cap B^c = (A^c \cap B^c) \cup (B \cap B^c)$
$= (A \cup B)^c \cup \varnothing = (A \cup B)^c$

10. 전체집합 $U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 의 부분집합 $A = \{2, 6\}$, $B = \{6, 8, 10\}$, $C = \{6, 10, 12\}$ 일 때, $(A \cup B) \cap C^c$ 은?

① $\{2\}$ ② $\{8\}$ ③ $\{2, 8\}$
④ $\{2, 8, 10\}$ ⑤ $\{2, 10, 12\}$

해설

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap C^c &= (A \cup B) - C \\ &= \{2, 6, 8, 10\} - \{6, 10, 12\} \\ &= \{2, 8\}\end{aligned}$$ 이다.

11. 명제 '이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑지 않다.'의 대우는?

① 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑다.

② 이번 일요일에 날씨가 맑지 않으면, 그날 체육 대회는 열리지 않는다.

③ 이번 일요일에 날씨가 맑으면, 그날 체육 대회는 열린다.

④ 이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑다.

⑤ 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑지 않다.

해설

명제 $p \to q$ 의 대우는 $\sim q \to \sim p$ 이다.

12. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $(g \circ f)(2)$의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$\therefore\ (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$

13. 집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 두 조건이 성립한다.

㉠ $(A \cap B) \cup (A - B) = A \cup B$
㉡ $(A \cup B) \cup (B - A) = U$

이 때, 다음 중 반드시 참인 것은?

① $A = \varnothing$　② $B = \varnothing$　③ $A = B$

④ $A = U$　⑤ $B = U$

해설

㉠의 좌변을 정리하면

$(A \cap B) \cup (A - B) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

$= A \cap (B \cup B^c) = A \cap U = A$

$\therefore A = A \cup B \cdots$ ㉮

㉡에서 $B - A \subset A \cup B$이므로 좌변을 정리하면 $A \cup B$이 된다.

$\therefore A \cup B = U \cdots$ ㉯

㉮과 ㉯에 따라 $A = A \cup B = U$가 된다.

14. 석훈이네 아파트 한 동에는 전체 350 가구가 살고 있다. 이 중에서 우유를 배달시키는 집은 250가구, 요구르트를 배달시키는 집은 160 가구, 우유나 요구르트를 배달시키는 집은 310가구 일 때, 요구르트만 배달시키는 가구 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가구

▷ 정답 : 60 가구

해설

우유를 배달시키는 집의 집합을 A, 요구르트를 배달시키는 집의 집합을 B라 하자.

$n(U) = 350,\ \ n(A) = 250,\ \ n(B) = 160,\ \ n(A \cup B) = 310$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$310 = 250 + 160 - n(A \cap B)$

$n(A \cap B) = 100$

$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 160 - 100 = 60$

15. 두 명제 $p \to q$와 $\sim r \to \sim q$가 모두 참일 때, 다음 중 '반드시 참이다' 라고 말할 수 없는 명제는?

① $q \to r$　　② $p \to r$　　③ $\sim p \to \sim r$

④ $\sim r \to \sim p$　　⑤ $\sim q \to \sim p$

해설

$p \to q \leftrightarrow \sim q \to \sim p$ $\sim r \to \sim q \leftrightarrow q \to r$ $p \to q$, $q \to r$ 이므로

$p \to r \leftrightarrow r \to \sim p$

16. 다음 보기 중 $a^2+b^2 \neq 0$과 동치인 것을 모두 고르면? (단, a, b 는 실수)

㉠ $a^2+b^2=0$	㉡ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
㉢ $ab \neq 0$	㉣ $a+b \neq 0$ 이고 $ab=0$
㉤ $a^2+b^2>0$	

① ㉠　② ㉡　③ ㉢
④ ㉠, ㉡　⑤ ㉡, ㉤

해설

$a^2+b^2 \neq 0$은 a, b중 적어도 하나는 0 이 아니므로 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다.
㉠ $a^2+b^2=0$ 이면 $a=0$ 이고 $b=0$ 이다.
㉢ $ab \neq 0$ 이면 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ 이다.
㉣ $a+b \neq 0$ 이고 $ab=0$ 이면 a, b 둘 중에 하나는 0이 아니다.
㉤ $a^2+b^2>0$ 이면 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다. 따라서 $a^2+b^2 \neq 0$ 과 동치인 것은 ㉡, ㉤이다.

17. $x \geq a$가 $x^2 - 4 < 0$의 필요조건이 되게 하는 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 - 4 < 0$ 에서 $-2 < x < 2$ 이므로 $x \geq a$가 $-2 < x < 2$의 필요조건이 되기 위해서는 $a \leq -2$ 이어야 한다. 따라서, a 의 최댓값은 -2이다.

18. $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때,

부등식 $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq$ □가 항상 성립한다. □ 안에 알맞은 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 12

해설

$a,\ b,\ c$ 가 모두 양수이므로

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$

따라서

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \frac{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}}{abc} = \frac{8abc}{abc} = 8$$

19. 자연수 n을 $n = 2^p \cdot k$ (p는 음이 아닌 정수, k는 홀수)로 나타낼 때, $f(n) = p$라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$이다. 다음 <보기>중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

㉠ n이 홀수이면 $f(n) = 0$이다.

㉡ $f(8) < f(24)$이다.

㉢ $f(n) = 3$인 자연수 n은 무한히 많다.

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$에서
㉠ n이 홀수이면, k가 홀수이므로 2^p이 홀수
$\therefore p = 0$ 즉, $f(n) = 0$
㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
$\therefore f(8) = f(24)$
㉢ $f(n) = 3$에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k는 무수히 많으므로 n도 무수히 많다.

20. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일 대응의 개수는 (가) 이고, 항등함수의 개수는 (나) 이며 상수함수의 개수는 (다) 이다. 이때, (가) ~ (다) 에 알맞은 수를 순서대로 적은 것은?

① 6, 3, 3　② 6, 3, 1　③ 6, 1, 3

④ 27, 3, 1　⑤ 27, 1, 3

해설

(i) 일대일 대응 $f : X \to X$ 라 하면

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-1,\ 0,\ 1$중 하나이므로 3개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$의 값을 제외한 2개

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1),\ f(2)$의 값을 제외한 1개이다.

따라서, 일대일 대응의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$(개)

(ii) 항등함수 $f(-1) = -1, f(0) = 0,\ f(1) = 1$의 1개

(iii) 상수함수 : $x \in X$일 때

$f(x) = -1$ 또는 $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 1$의 3개

따라서, (가), (나), (다) 에 알맞은 수는 차례로 6, 1, 3이다.

21. 함수 $f(x)$가

$f(x)=\begin{cases} x & (x\text{는유리수}) \\ 1-x & (x\text{는무리수}) \end{cases}$ 일 때, $(f\circ f)(x)$는 무엇인가?

① $-x$　　② $1-x$　　③ $2x-3$

④ x　　⑤ $x+2$

해설

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\text{는유리수}) \\ 1-x & (x\text{는무리수}) \end{cases}$$

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$

(i) x 가 유리수일 때, $f(f(x))=f(x)=x$

(ii) x가 무리수이면 $1-x$ 도 무리수이므로,

$f(f(x))=f(1-x)=1-(1-x)=x$

(i), (ii)에 의해서 $f(f(x))=x$

22. 집합 $A = \{x \mid x > 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $f \circ g$ 가 $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{2x-1}$ 일 때, $(f \circ (g \circ f)^{-1}(3)$ 의 값은?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$(f \circ (g \circ f)^{-1}) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1}) = g^{-1}$
$\therefore g^{-1}(3) = k$ 라 하면

$g(k) = 3$
$\Rightarrow \sqrt{2}k - 1 = 3 \Rightarrow k = 5$

23. 실수 전체에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)=3x+2$, $g(x)=x+2$ 일 때, $(f^{-1}\circ g)(3)+(g^{-1}\circ f)(1)$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$(f^{-1}\circ g)(3)+(g^{-1}\circ f)(1)=f^{-1}(5)+g^{-1}(5)$
$f^{-1}(5)=k$ 이면 $f(k)=5, g^{-1}(5)=X$ 이면 $g(X)=5$

$\Rightarrow k=1, X=3$
$\Rightarrow$(준식)$=1+3=4$

24. $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $y = 2|x-1| + x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, 상수 M , m 의 합 $M + m$ 의 값은?

① 9　　② 8　　③ 7　　④ 6　　⑤ 5

해설

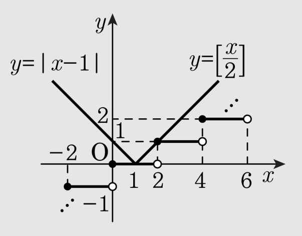
$y = 2|x-1| + x$ 에서
(i) $x \ge 1$ 일 때, $y = 2x - 2 + x = 3x - 2$
(ii) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x-1) + x = -x + 2$ 이므로
$0 \le x \le 3$ 에서 $y = 2|x-1| + x$
따라서 $x = 3$ 일 때, 최댓값 7 , $x = 1$ 일 때 최솟값 1 을 가지므로
$M + m = 7 + 1 = 8$

25. 두 함수 $y = |x-1|$, $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수를 구하면?
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$y = |x-1|$ 과 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, $y = |x-1|$ 과 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수는 2 개이다.