1. $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 $P=\{p|p=a+b,\ a\in A,\ b\in B\}$, $Q=\{q|q=ab,\ a\in A,\ b\in B\}$일 때, 집합 $P\cap Q$의 원소의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

집합 P는 집합 A의 원소와 집합 B의 원소끼리 더한 것을 원소로 하고, 집합 Q는 집합 A의 원소와 집합 B의 원소끼리 곱한 것을 원소로 한다. 두 집합의 원소를 구하면 $P=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Q=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이므로

$P\cap Q=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

따라서 집합 $P\cap Q$의 원소의 개수는 4개이다.

2. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 각각 공집합이 아닐 때, 항상 서로소인 두 집합끼리 짝지은 것은?

① A와 $A \cap B$ ② $A - B$와 $A \cup B$

③ $A \cap B$와 $A \cup B$ ④ $A^c \cap B$와 B

⑤ $A \cup B^c$와 $B - A$

해설

$B^c \cup A$은 $(B - A)^c$을 나타내는 것과 같으므로, 서로소인 집합이 된다.

3. 두 집합 A, B에 대하여 $A \cup B = \{x \mid x$는 5이하의 자연수$\}$, $A = \{2,\ 3,\ 5\}$ 일 때, 다음 중 집합 B가 반드시 포함해야 하는 원소는?

① 1, 4　　② 1, 3, 5　　③ 2, 3, 5

④ 2, 3, 4, 5　　⑤ 1, 2, 3, 4, 5

해설

집합 $A = \{2,\ 3,\ 5\}$, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로 집합 B는 원소 1, 4를 반드시 포함하는 $A \cup B$의 부분집합이다.

4. 두 집합 $A=\{x|x$는 15미만의 소수$\}$, $B=\{11,\ 13,\ a,\ a+1\}$ 에 대하여 $A\cup B=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 13\}$ 일 때, a 의 값을 모두 구하면?

① 2 ② 5 ③ 6 ④ 9 ⑤ 10

해설

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$, $A\cup B=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 13\}$ 이므로 $6\in B$

(i) $a=6$ 일 때,

$B=\{6,\ 7,\ 11,\ 13\}$

$A\cup B=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 13\}$

(ii) $a+1=6$ 일 때,

$a=5$ 이므로 $B=\{5,\ 6,\ 11,\ 13\}$

$A\cup B=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 13\}$

따라서 $a=5$ 이다.

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B$ 와 집합 B 가 다음과 같을 때, 다음 중 집합 A 가 될 수 <u>없는</u> 것은?

$A \cup B = \left\{x \mid x\text{는 8의 약수}\right\}$, $B = \left\{x \mid x\text{는 3미만의 자연수}\right\}$

① $\{1,\ 4,\ 8\}$

② $\left\{x \mid x\text{는 5보다 큰 2의 배수}\right\}$

③ $\left\{x \mid x\text{는 10보다 작은 4의배수}\right\}$

④ $\left\{x \mid x\text{는 8의 약수}\right\}$

⑤ $\left\{x \mid x\text{는 12의 약수}\right\}$

해설

집합 $B = \{1,\ 2\}$ 이고, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$ 이므로
집합 A 는 원소 4, 8 을 반드시 포함하는 $A \cup B$ 의 부분집합이다.
⑤ $\left\{x \mid x\text{는 12의 약수}\right\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\} \not\subset \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$

6. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$ 이고, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$A \cap X = X$ 이므로 $X \subset A$

$(A \cap B) \cup X = X$ 이므로

$(A \cap B) \subset X$

$A \cap B = \{2, 3\}$

$\{2, 3\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$

X 는 $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 중 원소 2 , 3 을 포함하는 집합이다.

집합 X 의 개수 : $2^2 = 4$ 개다.

7. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 12 미만의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B = \{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11\}$에 대하여 $n((A-B)^c)$ 은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 10,\ 11\}$

$A - B = \{4,\ 8,\ 10\}$

$(A-B)^c = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11\}$

$\therefore\ n\left((A-B)^c\right) = 8$

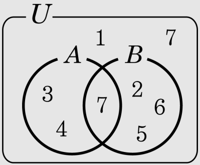
8. 전체집합 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A-B=\{3,\ 4\}$, $B-A=\{2,5,6\}$, $(A\cup B)^c=\{1\}$ 일 때, 집합 B 를 나타낸 것으로 옳은 것은?

① $\{2,5,6\}$ ② $\{2,5,6,7\}$ ③ $\{1,2,5\}$

④ $\{1,2,5,6\}$ ⑤ $\{1,2,5,6,7\}$

해설

주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면



$\therefore\ B=\{2,5,6,7\}$

[별해] $(A\cup B)^C=\{1\}$ 이므로

$A\cup B=\{2,3,4,5,6,7\}$ 이다.

$B=(A\cup B)-(A-B)=\{2,5,6,7\}$

9. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 $\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap B=B$를 만족할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $A\subset B$ ② $A=B$ ③ $A^c\subset B^c$

④ $A\cap B=\varnothing$ ⑤ $A\cup B=U$

해설

$\{(A\cap B^c)\cup(A\cap B)\}\cap B$

$=\{A\cap(B^c\cup B)\}\cap B$

$=(A\cap U)\cap B=A\cap B=B$

즉, $B\subset A$ 이다.

따라서 $A^c\subset B^c$ 역시 성립한다.

10. 두 집합 $A=\{1,\ 4,\ 6,\ 7,\ a\}$, $B=\{2,\ 3,\ b,\ b+3\}$에 대하여 $A-B=\{1,\ 5,\ 6\}$일 때, $a+b$의 값은?

① 1　② 3　③ 6　④ 9　⑤ 12

해설

집합 A에서 $a=5$이고,
$A\cap B=\{4,\ 7\}$ 이므로
(i) $b+3=4$ 일 때, $b=1$이므로
$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \Rightarrow A\cap B=\{1,\ 4\}$ (×)
(ii) $b=4$일 때,
$B=\{2,\ 3,\ 4,\ 7\} \Rightarrow A\cap B=\{4,\ 7\}$ (○)
$\therefore\ a+b=5+4=9$

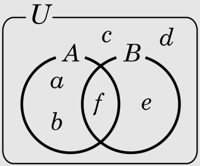
11. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ 의 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{a, b\}$, $B - A = \{e\}$, $A^c \cap B^c = \{c, d\}$ 일 때, 집합 A^c 은?

① $\{b\}$　　② $\{e\}$　　③ $\{b, e\}$

④ $\{c, d\}$　　⑤ $\{c, d, e\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A^c = \{c, d, e\}$ 이다.



12. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 6 이하의 자연수$\}$, $B = \{x \mid x$는 10 이하의 홀수$\}$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족하는 집합 X 의 개수는?

I. $A \cap X = X$ II. $(A - B) \cup X = X$

① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이고 $(A - B) \subset X \subset A$ 이다.

따라서 $\{2, 4, 6\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로

집합 X 의 개수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$(개) 이다.

13. $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{x+y \mid x\in A,\ y\in A\}$, $C=\{xy \mid x\in A,\ y\in A\}$일 때, 집합 $A\cup(B-C)$의 부분집합의 개수를 구하면?

① 3 개　② 4 개　③ 6 개　④ 7 개　⑤ 8 개

해설

$B=\{2,\ 3,\ 4\}$, $C=\{1,\ 2,\ 4\}$

$\therefore\ B-C=\{3\}$

$\therefore\ A\cup(B-C)=\{1,\ 2,\ 3\}$ 부분집합의 개수는 $2^3=8$ (개)이다.

14. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cap B^c)$을 간단히 하면?

① A ② B ③ $\varnothing$ ④ U ⑤ $A \cup B$

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cup B)^c$

$= (A \cup B) - (A \cup B) = \varnothing$

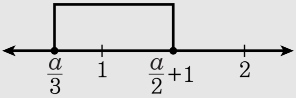
15. 두 집합 $A = \{1,\ 2\}$, $B = \left\{ x \,\middle|\, \frac{a}{3} \le x \le \frac{a}{2} + 1 \right\}$에 대하여 $A - B = \{2\}$일 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a < 2$ ② $a \le 3$ ③ $a < 3$

④ $0 \le a < 2$ ⑤ $0 < a \le 2$

해설

$A - B = \{2\}$이므로 $1 \in B$, $2 \notin B$



따라서 $\frac{a}{3} \le 1$, $1 \le \frac{a}{2} + 1 < 2$이므로 $0 \le a < 2$

16. 자연수 k의 양의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A_4 \subset A_2$

② $A_4 \cup A_6 = A_{12}$

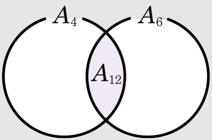
③ $A_2 \cap A_3 = A_6$

④ $(A_2 \cap A_3) \subset (A_3 \cup A_4)$

⑤ $A_3 \cap A_5 = A_{15}$

해설

$A_4 \cap A_6 = A_{12}$, $A_4 \cup A_6 \neq A_{12}$



17. 전체 집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A * B = (A \cap B^c) \cup A^c$로 나타내기로 할 때, 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면? (단, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$)

① $A * A = A^c$　　② $A * B = B * A$　　③ $A * U = A^c$

④ $A * \varnothing = U$　　⑤ $A * A^c = \varnothing$

해설

$A*B = (A\cap B^c)\cup A^c = (A\cup A^c)\cap(B^c\cup A^c) = U\cap(A\cap B)^c = (A\cap B)^c$

즉, $A * B = (A \cap B)^c$ 를 나타낸다. 이에 따라 각각 연산을 해보면

① $A * A = (A \cap A)^c = A^c$

② $A * B = (A \cap B)^C = (B \cap A)^c = B * A$

③ $A * U = (A \cap U)^c = A^c$

④ $A * \varnothing = (A \cap \varnothing)^c = \varnothing^c = U$

⑤ $A * A^c = (A \cap A^c)^c = \varnothing^c = U$

∴ ⑤가 옳지 않다.

18. 전체집합 $U = \{x | x$는 7 이하의 자연수$\}$ 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, $C = \{3, 4, 7\}$일 때, $(A \cup B) \cap C^c$ 은?

① $\{1\}$　② $\{1, 2\}$　③ $\{1, 6\}$

④ $\{1, 2, 6\}$　⑤ $\{1, 2, 5, 6\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 이므로

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap C^c &= (A \cup B) - C \\ &= \{1, 2, 3, 5, 6\} - \{3, 4, 7\} \\ &= \{1, 2, 5, 6\}\end{aligned}$$

이다.

19. 전체집합 $U=\{x \mid x$는 15 이하의 자연수$\}$의 세 부분집합 $A=\{x \mid x$는 2의 배수$\}$, $B=\{x \mid x$는 12의 약수$\}$, $C=\{x \mid x$는 3의 배수$\}$에 대하여 연산 ◎를 $A◎B=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$로 정의할 때, $n((A◎B)◎(A◎C))$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 14,\ 15\}$

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\ ,\ 10,\ 12,\ 14\}$

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

$C=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\}$

$A◎B=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$

$\quad=(A-B)\cup(B-A)$이므로

$A◎B=\{8,\ 10,\ 14\}\cup\{1,\ 3\}$

$A◎C=\{2,\ 4,\ 8,\ 10,\ 14\}\cup\{3,\ 9,\ 15\}$

$\therefore (A◎B)◎(A◎C)$

$=\{1,\ 3,\ 8,\ 10,\ 14\}◎\{2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 9,\ 10,\ 14,\ 15\}$

$=\{1\}\cup\{2,\ 4,\ 9,\ 15\}$

$\therefore n((A◎B)◎(A◎C))=5$

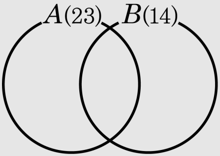
20. 어느 편의점에서는 햄 샌드위치와 치즈 샌드위치 두 종류를 판매한다. 어느 날 판매량을 살펴보니 총 30명의 손님이 샌드위치를 사갔는데, 23명의 손님이 햄 샌드위치를 사갔고, 14명의 손님이 치즈 샌드위치를 사갔다. 샌드위치를 하나만 사간 손님은 모두 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 23 명

해설

햄 샌드위치를 산 손님의 집합을 A, 치즈 샌드위치를 산 손님의 집합을 B 라고 할 때, 주어진 조건을 벤 다이어그램에 그리면 다음과 같다.



햄 샌드위치와 치즈 샌드위치를 모두 사간 손님은 $A \cap B$ 이다.

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 23 + 14 - 30 \\ &= 7 \end{aligned}$$

샌드위치를 하나만 사간 손님의 수는

$n(A - (A \cap B)) + n(B - (A \cap B))$ 이다.

$n(A - (A \cap B)) + n(B - (A \cap B))$

$= (23 - 7) + (14 - 7) = 16 + 7 = 23$

따라서 샌드위치를 하나만 사간 손님은 23명이다.

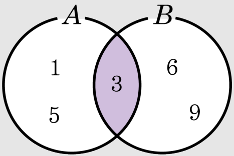
21. 두 집합 A, B에 대하여 $A = \{x \mid x$는 5 이하의 홀수$\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 9\}$일 때, 집합 B를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{3,\ 6,\ 9\}$

해설

$A = \{1, 3, 5\}$이고, 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $B = \{3, 6, 9\}$이다.

22. $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ 를 만족하는 자연수 $a_k(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ 를 원소로 하는 집합 A 와 집합 $B = \{a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2,\ a_5^2\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{a_1,\ a_4\}$ 이고 $a_1 + a_4 = 10$ 이다. $A \cup B$ 의 원소의 합이 224 일 때, $a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 142

해설

$A \cap B = \{a_1,\ a_4\}$ 에서 a_1, a_4 모두 제곱수이고, 두 수의 합이 10 이므로 $a_1 = 1, a_4 = 9$

9 가 집합 B 의 원소이므로 집합 A 의 원소 중에는 3 이 포함되고, 또 9 가 집합 A 의 원소이므로 집합 B 의 원소 중에는 81 이 포함된다. 또, a_5 가 a_4 보다 크지만 a_5 가 10 보다 커지면 합집합이 224 보다 커지므로 a_5 는 10 이 되고, 차례로 대입하면 $a_3 = 4$ 가 된다.

$A = \{1,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10\}$

$B = \{1,\ 9,\ 16,\ 81,\ 100\}$

$\therefore a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2 = 3 + 4 + 10 + 9 + 16 + 100 = 142$

23. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B = \{1, 3, 4\}$, $A^C \cap B = \{4\}$ 일 때, 집합 A 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$B = \{1, 3, 4\}$, $A^C \cap B = \{4\}$ 이므로 남은 원소는 2 , 5 이므로 A 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는 $2 \times 2 = 4$(개) 이다.

24. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 9 이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1,2,3,4,5\}$, B 에 대하여 집합 $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = \{1,2,9\}$ 를 만족하는 집합 B 는?

① $\{2,3,4\}$ ② $\{3,4,5\}$ ③ $\{3,4,5,6\}$

④ $\{3,4,5,7\}$ ⑤ $\{3,4,5,9\}$

해설

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{1,2,3,4,5\}$, $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1,2,9\}$ 이므로 $A \cap B = \{3,4,5\}$ 이다.

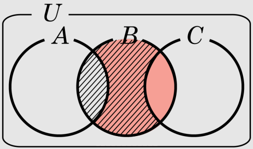
따라서 집합 $B = \{3,4,5,9\}$ 이다.

25. 세 집합 A, B, C에 대하여 $A \subset C^c$이고 $n(B) = 5$, $n(B-A) = 4$, $n(B-C) = 3$이다. 이 때, 집합 $B-(A \cup C)$의 원소의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 없다.

해설

$A \subset C^c \ \leftrightarrow \ A \cap C = \phi$ 이므로 다음 벤 다이어그램에서 붉게 색칠한 부분은 집합 $B-A$를 나타내고 빗금이 있는 부분은 집합 $B-C$를 나타내고 둘 다 있는 부분은 집합 $B-(A \cup C)$를 나타낸다.



$n(B-A) = n(B) - n(A \cap B) = 4 \therefore \ n(A \cap B) = 1$

$n(B-C) = n(B) - n(B \cap C) = 3 \therefore \ n(B \cap C) = 2$

즉, $B-(A \cup C) = n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) = 5 - 1 - 2 = 2$