

1. 두 양수 a, b 에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

- ① a, b 의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$ 이다.
- ② $\sqrt{ab}$ 는 a, b 의 기하평균이다.
- ③ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 은 절대부등식이다.
- ④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$ 이다.
- ⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 는 항상 성립한다.

해설

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \dots$ 절대부등식

$\frac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.

2. 양수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$ 을 만족할 때, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$

(단, 등호는 $a^2 = b^2$ 일 때 성립)

그런데 $a^2 + b^2 = 1$ 이므로 $1 \geq 2ab$

$$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{a^2} > 0, \frac{1}{b^2} > 0$ 이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

(단, 등호는 $a^2 = b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

3. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2 + b^2 = 5, x^2 + y^2 = 3$ 일 때 다음 중 $ax + by$ 의 값이 될 수 없는 것은?

① -1 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

a, b, x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
 $5 \times 3 \geq (ax + by)^2$
 $\therefore -\sqrt{15} \leq ax + by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax + by$ 의 범위에 속하지 않는다.

4. 다음은 실수 a, b 에 대하여 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 이 성립함을 증명한 것이다.

(증명) $|a+b| \geq 0, |a|+|b| \geq 0$ 이므로
 $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$ 을 증명하면 된다.
 $(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
 $= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
 $= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2$
 $= 2(|ab| - ab)$
그런데, (가) 이므로 $2(|ab| - ab) \geq 0$
 $\therefore |a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$
따라서 $|a+b| \leq |a|+|b|$
여기서, 등호가 성립하는 경우는 (나) 일 때,
즉, $ab \geq 0$ 일 때이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

- ① $|ab| \geq ab, a = b$
- ② $|ab| \geq ab, |ab| = ab$
- ③ $|ab| \leq ab, |ab| = ab$
- ④ $|ab| = ab, a = 0$
- ⑤ $|ab| = ab, a = b$

해설

(가) : $|ab| \geq ab$ ($\because |ab|$ 는 항상 양수)
(나) : $2(|ab| - ab) = 0$ 일 때, 즉 $|ab| = ab$

5. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

$\textcircled{\tiny \neg} \quad x + 1 > 0$	$\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad x^2 + xy + y^2 \geq 0$
$\textcircled{\tiny \sqcup} \quad x + y \geq x - y $	$\textcircled{\tiny \supset} \quad x + y \geq x - y $

- ① $\textcircled{\tiny \neg}$

② $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqcup}$

③ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \supset}$
- ④ $\textcircled{\tiny \sqsubset}, \textcircled{\tiny \supset}$

⑤ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqsubset}, \textcircled{\tiny \sqcup}$

해설

$\textcircled{\tiny \neg} \quad x > -1$ 일 때만 성립한다.
 $\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$
(단, 등호는 $x = y = 0$ 일 때 성립)
 $\textcircled{\tiny \sqcup} \quad (|x| + |y|)^2 - |x - y|^2$
 $\quad = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2$
 $\quad = 2(|xy| + xy) \geq 0$
 $\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2$
(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)
 $\textcircled{\tiny \supset} \quad$ (반례) $x = 2, y = -3$ 일 때
 $|2 + (-3)| = 1, |2 - (-3)| = 5$ 이므로
 $|x + y| < |x - y|$
따라서 절대부등식이 아닌 것은 $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \supset}$ 이다.

6. $x > 3$ 일 때 $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3

② 5

③ 12

④ 15

⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때, $x > 3$ 이므로 $3(x-3) > 0$, $\frac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$\begin{aligned} & 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11 \\ & \geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11 \\ & = 2 \cdot 3 + 11 = 17 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

7. 길이가 16m인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① 8 m^2 ② 16 m^2 ③ 25 m^2 ④ 36 m^2 ⑤ 64 m^2

해설

가로를 x , 세로를 y 라 하자.

$$2(x+y)=16 \quad x+y=8$$

산술기하평균을 사용하면,

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$4 \geq \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow 16 \geq xy$$

$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\text{m}^2)$

8. $x > y > 0$ 인 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y}$ 의 대소를 비교하면?

- ① $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$ ② $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$ ③ $\frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$
④ $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$ ⑤ $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$

해설

$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}$ 이라하면

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$$

$$= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$$

따라서 $\therefore \frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$

9. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a| - |b| \geq |a - b|$

② $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

④ $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 > 2(a + b - 1)$

해설

① 반례 : $a = -1, b = 1$

$|-1| - |1| \geq |-1 - 1|$

$|-1| - |1| \geq |-2|$

$1 - 1 \geq 2 \rightarrow 0 \geq 2 \rightarrow (\times)$

② $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$

$= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

③ $a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \geq a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

$a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay - bx)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

④ $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b - 1)$

$= a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + 1$

$= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 1 > 0 \rightarrow (\bigcirc)$

10. 다음은 실수 a, b, c 가 모두 양수일 때, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$ 임을 보이는 과정이다. [㉔] 안에 들어갈 알맞은 식은?

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c) \text{ [㉔]} \geq 0 \end{aligned}$$

- ① $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$
- ② $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$
- ③ $(a + b)^2 - (b + c)^2 - (c + a)^2$
- ④ $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$
- ⑤ $(a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2$

해설

$$\begin{aligned} \text{① } & \{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)\} \\ &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \end{aligned}$$